The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

# يمكن لطارتين أن تتشاركا الهندسة المحلية نفسها ومع ذلك تكونا شكلين مختلفين

يقدم بناء منشور في *l'IHES de mathematiques Publications* أول أزواج *Bonnet* المدمجة: طارتين ملساوين وتحليليتين حقيقيتين في الفضاء ثلاثي الأبعاد، لهما المترية الداخلية نفسها والانحناء المتوسط نفسه عند النقاط المتناظرة، ومع ذلك لا يكونان السطح نفسه حتى بعد أي حركة صلبة. تحسم النتيجة أسئلة قديمة عن التفرد في هندسة السطوح، وتقدم مثالًا مضادًا دقيقًا لفكرة مغرية: أن عددًا كافيًا من القياسات المحلية لا بد أن يحدد شكلًا مدمجًا بصورة فريدة.

---

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES · DOI: z-00159-025-s10240/1007.10

# الشكل الذي يرفض أن يُعرَّف بصورة فريدة

تخيل أنك تقيس سطحًا من دون أن يُسمح لك بالخروج منه. تستطيع قياس المسافات على امتداده: كم تبعد نقطة عن أخرى إذا تحركت على السطح نفسه. هذا هو **المترية** الخاصة بالسطح. ثم أضف قياسًا آخر من الخارج: عند كل نقطة، سجّل متوسط انحناء السطح، أي **الانحناء المتوسط**.

يبدو ذلك قدرًا كبيرًا من المعلومات. وبالنسبة إلى كثير من الأسطح، هو كافٍ بالفعل. إذا عرفت المسافات الداخلية ودالة الانحناء المتوسط، فقد تتوقع أن يصبح شكل السطح في الفضاء ثلاثي الأبعاد محددًا بصورة فريدة.

لكن Bobenko Alexander وHoffmann Tim وSageman-Furnas Andrew بنوا الآن أسطحًا مدمجة تخالف هذا التوقع. تقدم ورقتهم طورَيْن — سطحين على هيئة حلقة تشبه الدونات، وإن لم يكونا دوناتين دائريتين عاديتين — وهما متساويا القياس ولهما الانحناء المتوسط نفسه عند النقاط المتناظرة، لكنهما غير متطابقين. لا يمكنك تدوير أحدهما أو نقله أو عكسه لتحصل على الآخر. إنهما غمران مختلفان فعلًا في الفضاء.

بلغة المجال، هما زوج **Bonnet مدمج**. وتصفهما الورقة بأنهما أول مثالين من هذا النوع.

## ما المشكلة؟

تفصل نظرية السطوح الكلاسيكية بين نوعين من المعلومات.

تخبرك المترية بالمسافات المقاسة على السطح. فالورقة المسطحة إذا لُفّت إلى أسطوانة تحتفظ بالمترية الداخلية نفسها: نملة صغيرة تمشي على الورقة لن تلاحظ الالتفاف إذا لم تقس إلا المسافات. أما **الشكل الأساسي الثاني** الكامل فيخبرك أكثر بكثير عن كيفية انحناء السطح في الفضاء. تقول مبرهنة Bonnet الكلاسيكية إنه إذا كانت المترية وبيانات الانحناء الكاملة تحقق معادلات التوافق المناسبة، فإن الغمر يتحدد حتى حركة صلبة.

لكن في 1867 طرح Bonnet Ossian Pierre سؤالًا أدق. ماذا لو قللنا بيانات الانحناء؟ بما أن المترية تحدد أصلًا الانحناء الغاوسي داخليًا، فهل يمكن وصف السطح بصورة فريدة باستخدام المترية مع دالة الانحناء المتوسط فقط؟

في الحالة العامة، نعم. وهذه العبارة مهمة. ففي الهندسة توجد حالات استثنائية كثيرًا: أسطح خاصة تفشل عندها عبارة التفرد المعتادة. والسؤال المفتوح كان هل توجد أمثلة مدمجة وملساء تتفق فيها المترية والانحناء المتوسط، ومع ذلك لا يكون السطحان الشكل نفسه في الفضاء.

هذه هي **مسألة Bonnet العالمية**. والورقة الجديدة تجيب عنها باستخدام الطارات.

## ما الذي بناه المؤلفون

يبني المؤلفون زوجًا من الطارات الملساء في R3 مرتبطين بتساوي قياس يحافظ على الانحناء المتوسط. وهذا يعني أن النقاط المتناظرة لها المسافات الداخلية المحلية نفسها وقيمة الانحناء المتوسط نفسها، لكن السطحين غير متطابقين.

والبناء يفعل أكثر من إنتاج فضول عددي واحد. فالطارات **تحليلية حقيقية** — منتظمة بقدر هندسة متسلسلات القوى، وليست أجسامًا

خشنة جُمعت من رقع — ويبرهن المؤلفون أن أمثلتهم، في الحالة العامة، لا ترتبط بأي تساوي قياس للفضاء المحيط. كما يذكرون أن بناءهم يعطي عددًا غير معدود من هذه الأزواج، لأنه يحتوي على معامل دالي.

الطريق تقني. فهو يستخدم العلاقة بين أزواج Bonnet والأسطح متساوية الحرارة (isothermic surfaces)، وهي فئة من الأسطح لها إحداثيات خاصة لخطوط الانحناء. تبدأ الأمثلة بطارات متساوية الحرارة، يكون أحد عائلات خطوط انحنائها مستويًا، ثم يُطبَّق بناء ينتج زوج Bonnet. ويقول المؤلفون إن النهج نشأ من تجارب حسابية على تقسيم رباعي 5×7 لطارة، حيث استُخدمت الهندسة التفاضلية المتقطعة كدليل يقود إلى النتيجة الملساء.

النتيجة المرئية أسهل فهمًا من البرهان. فالطارتان في الورقة لهما بيانات هندسية متطابقة، لكن وضعهما العالمي مختلف بصورة مرئية: في الشكل 1 للمؤلفين تكون «الانتفاخات» الكبيرة المتناظرة أقرب إلى بعضها في إحدى الطارتين منها في الأخرى. وهذا الفرق المرئي ليس خدعة في الرسم. المبرهنة تقول إن السطحين ليسا الشكل نفسه في الفضاء، رغم تطابق البيانات المحلية المختارة.

[figure_pair pending]

يعرض الشكل 1 من الورقة مثالًا عدديًا لطارتَي زوج Bonnet، ويُعرض هنا كشكل مزدوج. اللوحتان ليستا منظورين مختلفين للطارة نفسها، بل تمثلان الطارتين المختلفتين في الزوج. تساعد خطوط الشبكة الرمادية العين على تتبع إحداثيات السطح المتناظرة، بينما تحدد المنحنيات الملونة حلقات متناظرة من خطوط الانحناء. الفكرة الأساسية في الصورة هي عدم التطابق على المستوى العالمي: الانتفاخات الكبيرة تقع في مواضع مختلفة بوضوح، مع أن المبرهنة تقول إن للسطحين المترية الداخلية نفسها والانحناء المتوسط نفسه عند النقاط المتناظرة.

## لماذا لا يمثل ذلك تناقضًا

النتيجة لا تقول إن الهندسة اعتباطية، ولا إن القياسات عديمة الفائدة.

إنها تقول إن مجموعة بيانات مختزلة بعينها — المترية مع الانحناء المتوسط — ليست دائمًا كافية لتحديد سطح مدمج بصورة فريدة. تستخدم مبرهنة التفرد الكلاسيكية الكاملة معلومات أغنى عن الانحناء. فالانحناء المتوسط ليس إلا متوسط الانحناءين الرئيسيين. يخبرك بمدى انحناء السطح في المتوسط عند نقطة ما، لكنه لا يحتفظ بكل المعلومات عن الانحناء بحسب الاتجاه.

وهذا الفرق هو جوهر الموضوع. يمكن لسطحين أن يتفقا في المسافات على السطح وفي متوسط الانحناء عند كل نقطة متناظرة، مع اختلافهما في كيفية ترتيب ذلك الانحناء في الفضاء.

ولا تقول الورقة إن هذا الغموض هو الوضع المعتاد. المقدمة حذرة: في الحالة العامة، تحدد المترية مع الانحناء المتوسط السطح. أزواج Bonnet استثنائية. وقيمتها تحديدًا أنها تثبت أن الاستثناء موجود في الإطار المدمج والملس والتحليلي، حيث ظل السؤال من دون حسم.

## أي أسئلة قديمة تحسمها؟

السؤال الأول الذي يُحسم هو مسألة Bonnet العالمية: هل توجد غمران مدمجان وملسان وغير متطابقين في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد يرتبطان بتساوي قياس ولهما الانحناء المتوسط نفسه عند النقاط المتناظرة؟ يجيب المؤلفون: نعم.

والثاني هو مسألة Cohn-Vossen-Berger: هل توجد أسطح تحليلية مدمجة ومتساوية القياس في الفضاء الإقليدي ثلاثي الأبعاد لا يربط بينها أي تساوي قياس للفضاء المحيط؟ مرة أخرى، نعم، باستخدام الطارات التحليلية الناتجة عن البناء نفسه.

الجزء التحليلي مهم. فالأمثلة السابقة على عدم التفرد لأسطح مدمجة كان يمكن أن تعتمد على انتظام أقل أو تعديلات محلية. هذه الطارات ليست مجرد جسم أملس استُبدلت فيه نتوءة داخل رقعة واحدة. تشدد الورقة على أن الأحياء المتناظرة لا تكون متطابقة محليًا في أي مكان: الفرق منتشر في البناء كله، لا مخفيًا في «درزة إصلاح».

## لماذا يهم ذلك

هذه رياضيات بحتة، لكن الحدس واسع. قد يكون الشكل مفرط التحديد من ناحية، ومع ذلك غير محدد بما يكفي من ناحية أخرى. المهم ليس كمية البيانات فقط، بل ما إذا كانت تحتوي النوع الصحيح من المعلومات.

تبدو المترية مع الانحناء المتوسط قوية لأنها تجمع المسافات الداخلية مع مقياس خارجي للانحناء. لكن زوج Bonnet المدمج يكشف الفجوة: متوسط الانحناء ليس الانحناء الكامل. والتوافق المحلي لا يعني دائمًا تحديدًا عالميًا. والانتظام التحليلي ليس ضمانًا سحريًا للتفرد.

وهذا درس مفيد يتجاوز هذه المبرهنة. في الهندسة، تسأل المسائل العكسية كثيرًا ما إذا كانت مجموعة من القياسات تحدد الجسم الذي أنتجها. تقدم هذه الورقة جوابًا جديدًا وحادًا لمسألة كلاسيكية عن السطوح: ليس دائمًا، حتى عندما يكون الجسم مدمجًا وملسًا وتحليليًا.

## خلاصة واضحة

يبني Bobenko وHoffmann وSageman-Furnas أول أزواج Bonnet المدمجة: طارتين ملساوين وغير متطابقتين في R3 يرتبطان بتساوي قياس ولهما الانحناء المتوسط نفسه عند النقاط المتناظرة. أمثلتهما تحليلية حقيقية، وفي الحالة العامة لا ترتبط بأي تساوي قياس للفضاء المحيط، وهو ما يحسم — وفق صياغة الورقة — كلًا من مسألة Bonnet العالمية وسؤال التفرد التحليلي .Cohn-Vossen-Berger النتيجة لا تقلب نظرية السطوح الكلاسيكية؛ بل تُظهر أن البيانات المختزلة المكونة من المترية والانحناء المتوسط لا تكفي دائمًا لتحديد سطح مدمج بصورة فريدة.

## مراجعة بلا تهويل

**ما الذي تُظهره الورقة:** توجد أزواج Bonnet مدمجة وملساء. وبصورة أدق، يبني المؤلفون صراحة طارتين في R3 لهما المترية نفسها ودالة الانحناء المتوسط نفسها عند النقاط المتناظرة، لكنهما غير متطابقتين.

**ما هو معقول لكنه ليس جوهر النتيجة:** أن الاستكشاف الحاسوبي والهندسة المتقطعة يمكن أن يوجها بناءات ملساء صعبة. تقول الورقة إن هذا المسار كان مهمًا، لكن النتيجة تقوم على البرهان لا على الصورة العددية.

**ما الذي لا تُظهره:** أن جميع الأسطح أو معظمها غامضة. تبقى عبارة التفرد العامة جزءًا من الخلفية. هذه أمثلة استثنائية لكنها أمثلة مضادة حاسمة.

**أهم القيود للقارئ العام:** البرهان تقني جدًا وينتمي إلى الهندسة التفاضلية: أسطح متساوية الحرارة، وتصنيف أزواج Bonnet، وشروط دورية، وبناء تحليلي. يستطيع القارئ فهم معنى المبرهنة من دون متابعة هذه الآلات الرياضية.

**ما مقدار الثقة المناسب للقارئ العام؟** ثقة عالية في نص المبرهنة بوصفها نتيجة رياضية محكّمة. الحذر المطلوب هنا تفسيري لا أدلتي: اقرأها

على أنها «هذه البيانات الهندسية المختزلة لا تحدد الشكل دائمًا»، لا على أنها «الهندسة عاجزة عن تحديد الأشكال».

---

## المصادر

-025-s10240/1007.10 DOI ,(2025) l'IHES de mathematiques Publications Sageman-Furnas, and Hoffmann Bobenko, z-00159
https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z

arXiv:2110.06335 Sageman-Furnas, and Hoffmann Bobenko,
https://arxiv.org/abs/2110.06335