



## The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

# שני טורוסים יכולים לחלוק אותה גאומטריה מקומית ועדיין להיות צורות שונות

בנייה שפורסמה ב-*l'IHÉS de mathématiques Publications* נותנת את זוגות *Bonnet* הקומפקטיים הראשונים. שני טורוסים חלקים ואנליטיים ממשיים במרחב תלת-ממדי, בעלי אותו מטריק פנימי ואותה עקמומיות ממוצעת בנקודות תואמות, אך שאינם אותו משטח עד כדי תנועה קשיחה. התוצאה סוגרת שאלות ייחוד ישנות בגאומטריית משטחים והיא דוגמה נגדית מדויקת לרעיון מפתה. שגם כמות גדולה של מדידות מקומיות חייבת לזהות צורה קומפקטית.

---

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

## הצורה שמסרבת להזדהות

דמיינו שאתם מודדים משטח בלי שמותר לכם לצאת ממנו. אתם יכולים למדוד מרחקים לאורכו: כמה רחוק נקודה אחת מאחרת אם נעים על פני המשטח עצמו. זהו המטריק של המשטח. עכשיו הוסיפו מדידה אחת מבחוץ: בכל נקודה רשמו את הכיפוף הממוצע של המשטח, כלומר את העקמומיות הממוצעת שלו.

זה נשמע כמו הרבה מידע. עבור משטחים רבים, זה אכן מספיק. אם יודעים את המרחקים הפנימיים ואת פונקציית העקמומיות הממוצעת, אפשר לצפות שהצורה במרחב תלת-ממדי תיקבע באופן יחיד.

Sageman-Furnas Andrew ו-Hoffmann Tim Bobenko, Alexander בנו כעת משטחים קומפקטיים שמפריכים את הציפייה הזאת. המאמר שלהם מציג שני טורוסים — משטחים בצורת טבעת, אם כי לא "דונאט" עגול רגיל — שהם איזומטריים ובעלי אותה עקמומיות ממוצעת בנקודות תואמות, אך אינם חופפים. אי-אפשר להביא אחד אל השני באמצעות סיבוב, הזזה או השתקפות. אלה באמת שתי השראות שונות במרחב.

בשפת התחום, אלה זוגות Bonnet קומפקטיים. המאמר מציג אותם כדוגמאות הראשונות מסוג זה.

## מהי הבעיה

תורת המשטחים הקלאסית מפרידה בין שני סוגי מידע.

המטריק מתאר מרחקים שנמדדים על המשטח. יריעה שטוחה שמגלגלים לגליל שומרת על אותו מטריק פנימי: נמלה קטנה שהולכת על היריעה לא תוכל לגלות את הגלגול באמצעות מדידות מרחק בלבד. הצורה היסודית השנייה המלאה (second fundamental form) מספרת הרבה יותר על האופן שבו המשטח מתכופף בתוך המרחב. משפט Bonnet הקלאסי קובע שכאשר נתונים המטריק ומלוא נתוני הכיפוף, והם מקיימים את משוואות ההתאמה הנכונות, ההשראה נקבעת עד כדי תנועה קשיחה.

אבל ב-1867 שאל Bonnet Ossian Pierre שאלה חדה יותר. מה אם מצמצמים את נתוני הכיפוף? מכיון שהמטריק כבר קובע באופן פנימי את העקמומיות הגאוסיאנית, האם אפשר לאפיין משטח באמצעות המטריק יחד עם פונקציית העקמומיות הממוצעת?

באופן גנרי, התשובה היא כן. המילה "גנרי" חשובה. בגאומטריה יש לעיתים קרובות מקרים חריגים: משטחים מיוחדים שבהם טענת הייחוד הרגילה נכשלת. השאלה הפתוחה הייתה אם קיימות דוגמאות קומפקטיות וחלקות שבהן המטריק והעקמומיות הממוצעת זהים, אבל המשטחים שונים במרחב.

זוהי בעיית Bonnet הגלובלית. המאמר החדש עונה עליה באמצעות טורוסים.

## מה בנו המחברים

המחברים בונים זוג טורוסים חלקים ב-R3 הקשורים באמצעות איזומטריה השומרת על עקמומיות ממוצעת. כלומר, לנקודות תואמות יש אותם מרחקים פנימיים בסביבתן ואותו ערך של עקמומיות ממוצעת, ובכל זאת שני המשטחים אינם חופפים.

הבנייה עושה יותר מלהפיק סקרנות נומרית יחידה. הטורוסים הם אנליטיים ממשיים — סדירים ברמה של גאומטריה

הניתנת לפיתוח לטורי חזקות, לא עצמים מחוספסים שחוברו מטלאים — והמחברים מוכיחים שבאופן גנרי הדוגמאות שלהם אינן קשורות בשום איזומטריה של המרחב הסובב. הם גם מציינים שהבנייה נותנת אינספור בלתי-בן-מנייה זוגות כאלה, משום שהיא כוללת פרמטר פונקציונלי.

הדרך הטכנית מורכבת. היא משתמשת בקשר בין זוגות Bonnet לבין משטחים איזותרמיים (isothermic surfaces), מחלקת משטחים בעלת קואורדינטות מיוחדות של קווי עקמומיות. הדוגמאות מתקבלות מהתחלה בטורוסים איזותרמיים עם משפחה אחת של קווי עקמומיות מישוריים, ואז בהפעלת בנייה שמייצרת את זוג ה-Bonnet. המחברים מספרים שהגישה צמחה מניסויים חישוביים עם פירוק של טורוס לרשת מרובעים  $7 \times 5$ , תוך שימוש בגאומטריה דיפרנציאלית דיסקרטית כמדריך לתוצאה החלקה.

את התוצאה החזותית קל יותר להבין מאשר את ההוכחה. לשני הטורוסים במאמר יש נתונים גאומטריים תואמים אך סידור גלובלי שונה לעין: באיור 1 של המחברים, "בועות" גדולות תואמות נמצאות קרובות יותר זו לזו בטורוס אחד מאשר באחר. ההבדל הנראה אינו טריק של ציור. המשפט קובע שהמשטחים אינם אותה צורה במרחב, אף שהנתונים המקומיים שנבחרו זהים.

[figure\_pair pending]

איור 1 מהמאמר מציג דוגמה נומרית לזוג טורוסי Bonnet, כאן כאיור זוגי. שני הפאנלים אינם שתי זוויות של אותו טורוס: אלה שני הטורוסים השונים בזוג. קווי הרשת האפורים עוזרים לעין לעקוב אחר קואורדינטות משטח תואמות, והעקומות הצבעוניות מסמנות לולאות תואמות של קווי עקמומיות. הנקודה בתמונה היא אי-ההתאמה הגלובלית: ה"בועות" הגדולות נמצאות במיקומים שונים לעין, אף שהמשפט אומר שלשני המשטחים יש אותו מטריק פנימי ואותה עקמומיות ממוצעת בנקודות תואמות.

## למה זו אינה סתירה

התוצאה אינה אומרת שגאומטריה שרירותית, או שמדידות חסרות ערך.

היא אומרת שקבוצת נתונים מצומצמת מסוימת — מטריק ועוד עקמומיות ממוצעת — אינה תמיד מספיקה כדי לזהות משטח קומפקטי באופן יחיד. משפט הייחוד הקלאסי המלא משתמש במידע עשיר יותר על הכיפוף. עקמומיות ממוצעת היא רק ממוצע של שתי העקמומיות הראשיות. היא מספרת עד כמה המשטח מתכופף בממוצע בנקודה, אך אינה שומרת את כל המידע הכיווני על הכיפוף.

זו בדיוק ההבחנה. שני משטחים יכולים להסכים על המרחקים לאורך המשטח ועל הכיפוף הממוצע בכל נקודה תואמת, ובכל זאת להיות שונים באופן שבו הכיפוף מסודר במרחב.

המאמר גם אינו אומר שהעמימות הזאת טיפוסית. המבוא זהיר: באופן גנרי, מטריק ועוד עקמומיות ממוצעת אכן קובעים משטח. זוגות Bonnet הם חריגים. חשיבותם היא בכך שהם מראים שהחריג באמת קיים בהקשר הקומפקטי, החלק והאנליטי שבו השאלה נשארה פתוחה.

## אילו שאלות ישנות זה סוגר

השאלה הסגורה הראשונה היא בעיית Bonnet הגלובלית: האם קיימות שתי השראות קומפקטיות וחלקות, שאינן חופפות, במרחב אוקלידי תלת-ממדי, הקשורות באיזומטריה ושלהן אותה עקמומיות ממוצעת בנקודות תואמות?

המחברים עונים כן.

השאלה השנייה היא בעיית Cohn-Vossen-Berger האם קיימים שני משטחים אנליטיים קומפקטיים ואיזומטריים במרחב אוקלידי תלת-ממדי שאינם קשורים באיזומטריה של המרחב הסובב? שוב, התשובה היא כן, באמצעות הטורוסים האנליטיים שנוצרים מאותה בנייה.

החלק האנליטי חשוב. דוגמאות קודמות לאי-ייחוד עבור משטחים קומפקטיים יכלו להסתמך על רגולריות נמוכה יותר או על שינויים מקומיים. הטורוסים האלה אינם פשוט עצם חלק שבו החליפו "בליטה" באזור אחד. המאמר מדגיש שסביבות תואמות אינן חופפות מקומית בשום מקום: ההבדל פרוש לאורך הבנייה, לא מוסתר בתפר תיקון.

## למה זה חשוב

זו מתמטיקה טהורה, אבל האינטואיציה רחבה. צורה יכולה להיות מוגדרת-יתר במובן אחד ועדיין בלתי מזוהה מספיק במובן אחר. מה שקובע אינו כמה נתונים יש, אלא האם הנתונים כוללים את סוג המידע הנכון.

מטריק ועוד עקמומיות ממוצעת נשמעים חזקים משום שהם משלבים מרחקים פנימיים עם מדד חיצוני של כיפוף. זוג Bonnet הקומפקטי חושף את הפער: כיפוף ממוצע אינו כל הכיפוף. התאמה מקומית אינה תמיד זיהוי גלובלי. וגם רגולריות אנליטית אינה ערובה קסומה לייחוד.

זה לקח שימושי מעבר למשפט הזה. בגאומטריה, בעיות הפוכות שואלות לעיתים אם קבוצת מדידות קובעת את העצם שיצר אותן. המאמר נותן תשובה חדשה וחדה לבעיה קלאסית אחת של משטחים: לא תמיד — אפילו כשהעצם קומפקטי, חלק ואנליטי.

## בקצרה

Sageman-Furnas ו-Hoffmann Bobenko בנויים את זוגות Bonnet הקומפקטיים הראשונים: שני טורוסים חלקים ב-R3 שאינם חופפים, אך קשורים באיזומטריה ויש להם אותה עקמומיות ממוצעת בנקודות תואמות. הדוגמאות שלהם אנליטיות ממשיות ובאופן גנרי אינן קשורות בשום איזומטריה של המרחב הסובב, ובכך הן פותרות הן את בעיית Bonnet הגלובלית והן את שאלת הייחוד האנליטית Cohn-Vossen-Berger כפי שהיא מנוסחת במאמר. התוצאה אינה הופכת את תורת המשטחים הקלאסית; היא מראה שהנתונים המצומצמים של מטריק ועוד עקמומיות ממוצעת אינם תמיד מספיקים כדי לזהות משטח קומפקטי באופן יחיד.

## בדיקה מפוכחת

מה המאמר מראה: קיימים זוגות Bonnet קומפקטיים וחלקים. ליתר דיוק, המחברים בונים במפורש טורוסים ב-R3 עם אותו מטריק ואותה פונקציית עקמומיות ממוצעת בנקודות תואמות, אך שאינם חופפים.

מה סביר אבל אינו הנקודה המרכזית: שחקר חישובי וגאומטריה דיסקרטית יכולים להנחות בניות חלקות קשות. המאמר אומר שהדרך הזאת הייתה חשובה, אבל התוצאה נשענת על ההוכחה, לא על התמונה הנומרת.

מה הוא אינו מראה: שכל המשטחים, או רובם, עמומים לזיהוי. טענת הייחוד הגנרית נשארת חלק מהרקע. אלה

דוגמאות חריגות אך מכריעות.

**המגבלות העיקריות לקורא כללי:** ההוכחה טכנית מאוד ושייכת לגאומטריה דיפרנציאלית: משטחים איזותרמיים, סיווגי זוגות, Bonnet תנאי מחזור ובנייה אנליטית. אפשר להבין את משמעות המשפט בלי לעקוב אחר כל המנגנון.

**כמה ביטחון צריך להיות לקורא כללי?** גבוה לגבי נוסח המשפט כתוצאה מתמטית שעברה ביקורת עמיתים. הזהירות הנכונה היא פרשנית, לא ראייתית: לקרוא זאת כ"הנתונים הגאומטריים המצומצמים האלה לא תמיד קובעים את הצורה", ולא כ"גאומטריה אינה יכולה לזהות צורות".

---

## מקורות

10.1007/s10240-025- DOI , (2025) l'IHES de mathematiques Publications Sageman-Furnas, and Hoffmann Bobenko, 00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

arXiv:2110.06335 Sageman-Furnas, and Hoffmann Bobenko,

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>