



## The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

### Két tórusznak lehet ugyanaz a helyi geometriája, mégis különböző lehet az alakjuk

*A Publications mathématiques de l'IHÉS folyóiratban közölt konstrukció megadja az első kompakt Bonnet-párokat: két sima, valós analitikus tóruszt háromdimenziós térben, amelyeknek ugyanaz a belső metrikája és megfelelő pontjaikban ugyanaz a középgörbülete, mégsem azonosak merevmozgás erejéig. Az eredmény régi egyértelműségi kérdéseket zár le a felületgeometriában, és pontos ellenpéldát ad arra a csábító elképzelésre, hogy elegendő helyi mérés szükségképpen azonosít egy kompakt alakzatot.*

---

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

# Az alakzat, amely nem hagyja magát azonosítani

Képzeljük el, hogy úgy kell megmérnünk egy felületet, hogy nem léphetünk ki róla. Megmérhetjük a rajta futó távolságokat: milyen messze van két pont egymástól, ha magán a felületen haladunk. Ez a felület metrikája. Most adjunk hozzá még egy, kívülről származó mérést: minden pontban jegyezzük fel a felület átlagos hajlását, vagyis a középgörbületét.

Ez rengeteg információnak hangzik. Sok felületnél elég is. Ha ismerjük a belső távolságokat és a középgörbület függvényét, azt várhatnánk, hogy a háromdimenziós térbeli alak már egyértelműen meghatározott.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann és Andrew Sageman-Furnas most olyan kompakt felületeket szerkesztettek, amelyek cáfolják ezt a várakozást. Tanulmányuk két tóruszt — fánk alakú, bár nem közönségesen kerek fánkfelületet — ad meg, amelyek izometrikusak, és megfelelő pontjaikban ugyanaz a középgörbületük, mégsem kongruensek. Forgatással, eltolással vagy tükrözéssel nem vihetők egymásba. Valóban különböző térbeli immerziókról van szó.

A terület nyelvén ezek kompakt Bonnet-párok. A tanulmány szerint ezek az első ilyen példák.

## Mi a probléma?

A klasszikus felületelmélet kétféle információt különít el.

A metrika a felületen mért távolságokat mondja meg. Ha egy sík lapot hengerré tekerünk, belső metrikája változatlan marad: egy apró hangya, amely a lapon jár, pusztán távolságméréssel nem venné észre a feltekerést. A teljes második fundamentális forma ennél sokkal többet mond arról, hogyan görbül a felület a térben. A klasszikus Bonnet-tétel szerint ha ismerjük a metrikát és a teljes görbületi adatot, és azok teljesítik a megfelelő kompatibilitási egyenleteket, akkor az immerzió merevmozgás erejéig meghatározott.

Pierre Ossian Bonnet azonban 1867-ben élesebb kérdést tett fel. Mi történik, ha kevesebb görbületi adatot tartunk meg? Mivel a metrika a Gauss-görbületet már belső módon meghatározza, jellemezhető-e egy felület pusztán a metrikával és a középgörbület függvényével?

Általános helyzetben igen. Ez a szó fontos. A geometriában gyakran vannak kivételes esetek: különleges felületek, amelyeknél a szokásos egyértelműségi állítás megbukik. A nyitott kérdés az volt, léteznek-e kompakt, sima példák, amelyeknek a metrikája és középgörbülete megegyezik, miközben térbeli alakjuk mégsem ugyanaz.

Ez a globális Bonnet-probléma. Az új tanulmány tóruszokkal válaszolja meg.

## Mit építettek a szerzők?

A szerzők két sima tóruszt szerkesztenek R3-ban, amelyeket középgörbületet megőrző izometria kapcsol össze. Ez azt jelenti, hogy a megfelelő pontok környezetében ugyanazok a belső távolságok és ugyanaz a középgörbület értéke, a két felület mégsem kongruens.

A konstrukció nem csupán egyetlen numerikus különlegességet ad. A tóruszok valós analitikusak — olyan szabályosak, mint a hatványsorokkal leírható geometria, nem durván összeillesztett objektumok —, és a szerzők bizonyítják, hogy példáik általános esetben semmilyen környezeti izometriával nem vihetők egymásba. Azt is állítják, hogy konstrukciójuk megszámlálhatatlanul sok ilyen párt ad, mert egy funkcionális paramétert tartalmaz.

Az út technikai. A Bonnet-párok és az izotermikus felületek kapcsolatát használja; utóbbiak olyan felületek, amelyek speciális görbületivonal-koordinátákkal rendelkeznek. A példák olyan izotermikus tóruszokból indulnak, amelyek egyik görbületivonal-családja síkbeli, majd egy konstrukció előállítja a Bonnet-párt. A szerzők szerint a megközelítés egy tórusz 5x7-es négyzögfelosztásával végzett számítógépes kísérletekből nőtt ki, ahol a diszkrét differenciálgeometria szolgált útmutatóként a sima eredményhez.

A vizuális eredményt könnyebb felfogni, mint a bizonyítást. A tanulmány két tóruszának megfelelő geometriai adatai megegyeznek, globális térbeli elhelyezésük azonban láthatóan különbözik: a szerzők 1. ábráján az egymásnak megfelelő nagy „buborékok” az egyik tóruszon közelebb vannak egymáshoz, mint a másikon. Ez a látható különbség nem rajzolási trükk. A tétel szerint a felületek nem ugyanazt a térbeli alakot adják, noha a kiválasztott helyi adatok megegyeznek.

[figure\_pair pending]

A tanulmány 1. ábrája a Bonnet-pár tóruszainak egy numerikus példáját mutatja, itt páros ábraként. A két panel nem ugyanannak a tórusznak két nézete: a pár két különböző tórusza látható. A szürke hálónvonalak segítenek követni az egymásnak megfelelő felületi koordinátákat, a színes görbék pedig megfelelő görbületivonal-hurkokat jelölnek. Az ábra lényege a globális eltérés: a nagy buborékok láthatóan más helyen ülnek, miközben a tétel szerint a két felület belső metrikája és középgörbülete a megfelelő pontokban azonos.

## Miért nem ellentmondás ez?

Az eredmény nem azt állítja, hogy a geometria önkényes, vagy hogy a mérések haszontalanok.

Azt mondja, hogy egy bizonyos csökkentett adathalmaz — metrika plusz középgörbület — nem mindig elegendő egy kompakt felület egyértelmű azonosításához. A teljes klasszikus egyértelműségi tétel gazdagabb görbületi információt használ. A középgörbület csupán a két főgörbület átlaga. Megmondja, átlagosan mennyire hajlik a felület egy pontban, de nem őrzi meg a hajlás minden irányfüggő részletét.

Ez a különbség az egész eredmény lényege. Két felület megegyezhet a rajta mért távolságokban és

minden megfelelő pont átlagos görbületében, miközben eltérhet abban, hogyan rendeződik ez a hajlás a térben.

A tanulmány azt sem állítja, hogy ez a kétértelműség tipikus. A bevezetés gondos: általános esetben a metrika és a középgörbület meghatározza a felületet. A Bonnet-párok kivételek. Értékük éppen az, hogy megmutatják: ez a kivétel létezik a kompakt, sima és analitikus kategóriában is, ahol a kérdés addig nyitott maradt.

## Milyen régi kérdéseket zár le?

Az első a globális Bonnet-probléma: létezik-e két nem kongruens, kompakt, sima immerzió háromdimenziós euklideszi térben, amelyeket olyan izometria köt össze, amely megfelelő pontokban megtartja a középgörbületet? A szerzők válasza igen.

A második a Cohn-Vossen–Berger-probléma: létezik-e két izometrikus, kompakt, analitikus felület euklideszi háromtérben, amelyeket semmilyen környezeti izometria nem kapcsol össze? Ugyancsak igen, ugyanennek a konstrukciónak az analitikus tóruszai révén.

Az analitikus rész fontos. A kompakt felületek korábbi nem-egyértelműségi példái alacsonyabb regularitásra vagy helyi módosításokra támaszkodhattak. Ezek a tóruszok nem egyszerűen olyan sima objektumok, amelyek egyik foltján egy dudort kicseréltek. A tanulmány hangsúlyozza, hogy a megfelelő környezetek sehol sem lokálisan kongruensek: a különbség végighúzódik a konstrukción, nem egy javítási varratban rejtőzik.

## Miért fontos?

Ez tiszta matematika, de az intuíció szélesebb. Egy alakzat bizonyos értelemben túlhatározott lehet, mégis alulazonosított egy másikban. Nem az számít, mennyi adatunk van, hanem hogy az adat a megfelelő fajta információt tartalmazza-e.

A metrika plusz középgörbület erősnek tűnik, mert belső távolságokat kombinál egy külső görbületi mérőszámmal. A kompakt Bonnet-pár megmutatja a rést: az átlagos görbület nem a teljes görbület. A helyi egyezés nem mindig jelent globális azonosíthatóságot. Az analitikus szabályosság sem mágikus garancia az egyértelműségre.

Ez a tanulság túlmutat ezen a tételen. A geometriai inverz problémák gyakran azt kérdezik, hogy egy mérési adathalmaz egyértelműen meghatározza-e az azt létrehozó objektumot. Ez a tanulmány egy klasszikus felületproblémára ad új, éles választ: nem mindig, még akkor sem, ha az objektum kompakt, sima és analitikus.



## Röviden

Bobenko, Hoffmann és Sageman-Furnas megalkotják az első kompakt Bonnet-párokat: két nem kongruens, sima tóruszt  $R^3$ -ban, amelyeket izometria kapcsol össze, és megfelelő pontjaikban ugyanaz a középgörbületük. Példáik valós analitikusak, és általános esetben semmilyen környezeti izometria nem kapcsolja őket össze; ezzel a tanulmány megoldja mind a globális Bonnet-problémát, mind a Cohn-Vossen–Berger analitikus egyértelműségi kérdést a cikk megfogalmazása szerint. Az eredmény nem dönti meg a klasszikus felületelméletet; azt mutatja meg, hogy a metrika és a középgörbület csökkentett adata nem mindig elég egy kompakt felület egyértelmű azonosításához.

## Tárgyilagos mérleg

**Amit a tanulmány megmutat:** Léteznek kompakt, sima Bonnet-párok. Pontosabban a szerzők explicit módon olyan tóruszokat szerkesztenek  $R^3$ -ban, amelyek megfelelő pontjaikban ugyanazzal a metrikával és középgörbület-függvénnyel rendelkeznek, mégsem kongruensek.

**Ami valószínű, de nem a fő állítás:** Hogy a számítógépes és diszkrét geometriai kísérletezés segíthet nehéz sima konstrukciók megtalálásában. A tanulmány szerint ez az út fontos volt, de az eredmény a bizonyításon áll, nem a numerikus képen.

**Amit nem mutat meg:** Hogy minden vagy a legtöbb felület kétértelmű lenne. Az általános egyértelműségi állítás továbbra is a háttér része. Ezek kivételes, de döntő ellenpéldák.

**Fő korlátok egy általános olvasó számára:** A bizonyítás erősen technikai differenciálgeometriára épül: izotermikus felületekre, Bonnet-párok osztályozására, periódusfeltételekre és analitikus konstrukcióra. A tétel jelentése a gépezet végigkövetése nélkül is érthető.

**Mennyi bizalma legyen egy általános olvasónak?** Magas a tétel állításában mint lektorált matematikai eredményben. A megfelelő óvatosság értelmezési, nem bizonyítéki: úgy olvassuk, hogy „ez a csökkentett geometriai adat nem mindig határozza meg az alakot”, ne úgy, hogy „a geometria nem képes alakokat azonosítani”.

---

## Források

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>