



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Dva tory mohou mít stejnou lokální geometrii, a přesto být různými tvary

Konstrukce v Publications mathématiques de l'IHÉS přináší první kompaktní Bonnetovy dvojice: dva hladké, reálně analytické tory v trojrozměrném prostoru, které mají stejnou vnitřní metriku a stejnou střední křivost v odpovídajících si bodech, ale nejsou týmž povrchem až na tuhý pohyb. Výsledek uzavírá staré otázky jednoznačnosti v geometrii povrchů a je přesným protipříkladem lákavé představy, že dostatek lokálních měření musí kompaktní tvar určit.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHÉS · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

Tvar, který nelze jednoznačně určit

Představte si, že měříte povrch, ale nesmíte z něj vystoupit. Můžete měřit vzdálenosti podél něj: jak daleko je jeden bod od druhého, pokud se pohybujete po samotném povrchu. To je jeho metrika. Nyní přidejme ještě jedno měření zvenčí: v každém bodě zaznamenejme průměrné ohnutí povrchu, jeho střední křivost.

Zdá se, že je to velké množství informací. U mnoha povrchů skutečně stačí. Znáte-li vnitřní vzdálenosti a funkci střední křivosti, mohli byste očekávat, že tím bude tvar v trojrozměrném prostoru jednoznačně určen.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann a Andrew Sageman-Furnas však sestrojili kompaktní povrchy, které tomuto očekávání odporují. Jejich práce představuje dva tory — povrchy ve tvaru prstence, i když nikoli obyčejné kulaté prstence — které jsou izometrické a mají v odpovídajících si bodech stejnou střední křivost, ale nejsou shodné. Jeden nelze převést na druhý otočením, posunutím ani zrcadlením. Jde o skutečně odlišná vnoření do prostoru.

V jazyce oboru tvoří kompaktní Bonnetovu dvojici. Práce je označuje za první takové příklady.

V čem problém spočívá

Klasická teorie povrchů rozlišuje dva druhy informací.

Metrika popisuje vzdálenosti měřené na povrchu. Plochý list svinutý do válce si zachovává stejnou vnitřní metriku: malý mravenec, který po něm chodí, by svinutí pouhým měřením vzdáleností nepoznal. Úplná druhá fundamentální forma říká mnohem více o tom, jak se povrch ohýbá v prostoru. Klasická Bonnetova věta stanoví, že pokud metrika a úplné údaje o ohybu splňují příslušné podmínky kompatibility, je vnoření určeno až na tuhý pohyb.

Pierre Ossian Bonnet však v roce 1867 položil ostřejší otázku. Co když se údaje o ohybu omezí? Jestliže už metrika vnitřně určuje Gaussovu křivost, lze povrch charakterizovat metrikou spolu s funkcí střední křivosti?

Obecně je odpověď ano. Slovo „obecně“ je podstatné. Geometrie často zná výjimečné případy: zvláštní povrchy, u nichž obvyklé tvrzení o jednoznačnosti selhává. Otevřenou otázkou bylo, zda existují kompaktní hladké příklady, u nichž se metrika i střední křivost shodují, ale povrchy v prostoru stejné nejsou.

To je globální Bonnetův problém. Nová práce jej řeší pomocí torů.

Co autoři sestrojili

Autoři sestrojují dvojici hladkých torů v R^3 spojených izometrií zachovávající střední křivost. Odpovídající si body tedy mají ve svém okolí stejné vnitřní vzdálenosti a tutéž hodnotu střední křivosti, oba povrchy však nejsou shodné.

Konstrukce nepřináší jen jednu numerickou kuriozitu. Tory jsou reálně analytické — mají pravidelnost geometrie popisované mocninnými řadami, nejde o hrubě pospojované objekty — a autoři dokazují, že jejich příklady obecně nespojuje žádná izometrie okolního prostoru. Uvádějí také, že konstrukce poskytuje nespočetně mnoho takových dvojic, protože obsahuje funkční parametr.

Postup je technický. Využívá vztah mezi Bonnetovými dvojicemi a izotermickými povrchy, třídou povrchů se zvláštními souřadnicemi tvořenými čarami křivosti. Příklady vznikají z izotermických torů s jednou rodinou rovinných čar křivosti, na něž se použije konstrukce vytvářející Bonnetovu dvojici. Autoři píší, že přístup vyrostl z výpočetních experimentů s rozkladem toru na čtyřúhelníky v uspořádání 5×7 , přičemž diskretní diferenciální geometrie posloužila jako vodítko k hladkému výsledku.

Vizuální výsledek se chápe snáze než důkaz. Dva tory v práci mají shodné geometrické údaje, ale viditelně odlišné globální uspořádání: na obrázku 1 autorů leží odpovídající si velké „bubliny“ na jednom toru blíže k sobě než na druhém. Tento viditelný rozdíl není kreslířský trik. Věta říká, že povrchy nemají v prostoru stejný tvar, přestože se vybraná lokální data shodují.

[figure_pair pending]

Obrázek 1 z práce ukazuje numerický příklad torů tvořících Bonnetovu dvojici, zde jako spárovanou ilustraci. Panely nejsou dva pohledy na stejný torus: představují dva různé tory dané dvojice. Šedé čáry sítě pomáhají sledovat odpovídající si povrchové souřadnice, zatímco barevné křivky označují odpovídající si uzavřené čáry křivosti. Smyslem obrázku je globální neshoda: velké bubliny se nacházejí ve viditelně odlišných polohách, přestože podle věty mají oba povrchy stejnou vnitřní metriku a stejnou střední křivost v odpovídajících si bodech.

Proč to není rozpor

Výsledek neříká, že geometrie je libovolná nebo že měření jsou k ničemu.

Říká, že určitý omezený soubor údajů — metrika spolu se střední křivostí — nemusí vždy stačit k jednoznačnému určení kompaktního povrchu. Úplná klasická věta o jednoznačnosti používá bohatší informace o ohybu. Střední křivost je pouze průměrem dvou hlavních křivostí. Udává, jak moc se povrch v daném bodě průměrně ohýbá, ale nezachovává všechny informace o ohybu v jednotlivých směrech.

Právě toto rozlišení je podstatou výsledku. Dva povrchy se mohou shodovat ve vzdálenostech podél povrchu i v průměrném ohybu v každém odpovídajícím si bodě, a přesto se lišit způsobem, jakým je ohyb uspořádán v prostoru.

Práce také netvrdí, že je tato nejednoznačnost typická. Úvod je opatrný: obecně metrika spolu se střední křivostí povrch určuje. Bonnetovy dvojice jsou výjimečné. Jejich hodnota spočívá právě v tom, že dokazují existenci výjimky i v kompaktním, hladkém a analytickém prostředí, kde otázka zůstávala nevyřešená.

Které staré otázky výsledek uzavírá

První uzavřenou otázkou je globální Bonnetův problém: existují dvě neshodná kompaktní hladká vnoření v trojrozměrném eukleidovském prostoru, spojená izometrií a se stejnou střední křivostí v odpovídajících si bodech? Autoři odpovídají ano.

Druhou je Cohnův-Vossenův-Bergerův problém: existují v eukleidovském trojrozměrném prostoru dva izometrické kompaktní analytické povrchy, které nespojuje izometrie okolního prostoru? I zde zní odpověď ano, díky analytickým torům získaným toutéž konstrukcí.

Analytická část je důležitá. Dřívější příklady nejednoznačnosti kompaktních povrchů mohly využívat nižší regularitu nebo lokální úpravy. Tyto tory nejsou jen hladké objekty, u nichž se na jednom místě vyměnil hrbol. Práce zdůrazňuje, že odpovídající si okolí nejsou nikde lokálně shodná: rozdíl prostupuje celou konstrukcí a neskrývá se v místě napojení.

Proč na tom záleží

Jde o čistou matematiku, její intuice je však široká. Tvar může být v jednom smyslu přeurčený a v jiném stále nedostatečně určený. Rozhodující není množství dat, ale to, zda obsahují správný druh informace.

Metrika spolu se střední křivostí působí jako silná kombinace, protože spojuje vnitřní vzdálenosti s vnější mírou ohybu. Kompaktní Bonnetova dvojice ukazuje mezeru: průměrný ohyb není úplný ohyb. Lokální shoda nemusí vždy znamenat globální totožnost. Analytická regularita není zázračnou zárukou jednoznačnosti.

To je užitečné poučení i mimo tuto větu. Inverzní problémy v geometrii se často ptají, zda soubor měření určuje objekt, který je vytvořil. Tato práce dává pro jeden klasický problém teorie povrchů ostrou novou odpověď: ne vždy, i když je objekt kompaktní, hladký a analytický.

Stručné shrnutí

Bobenko, Hoffmann a Sageman-Furnas sestrojili první kompaktní Bonnetovy dvojice: dva neshodné hladké tory v R^3 , které jsou spojeny izometrií a mají v odpovídajících si bodech stejnou střední křivost. Jejich příklady jsou reálně analytické a obecně je nespojuje žádná izometrie okolního prostoru, čímž

podle formulace práce řeší globální Bonnetův problém i analytickou otázku jednoznačnosti Cohna-Vossena-Bergera. Výsledek nevyvrací klasickou teorii povrchů; ukazuje, že omezené údaje tvořené metrikou a střední křivostí nemusí vždy stačit k jednoznačnému určení kompaktního povrchu.

Kontrola bez příkras

Co práce ukazuje: Kompaktní hladké Bonnetovy dvojice existují. Konkrétně autoři explicitně sestavují torusy v R^3 se stejnou metrikou a funkcí střední křivosti v odpovídajících si bodech, které však nejsou shodné.

Co je možné, ale není podstatou výsledku: Výpočetní a diskrétně geometrické zkoumání může vést k obtížným hladkým konstrukcím. Práce uvádí, že tento postup byl důležitý, výsledek však stojí na důkazu, nikoli na numerickém obrázku.

Co práce neukazuje: Že jsou nejednoznačné všechny nebo většina povrchů. Obecné tvrzení o jednoznačnosti zůstává součástí východiska. Jde o výjimečné, ale rozhodující protipříklady.

Hlavní omezení pro běžného čtenáře: Důkaz je vysoce technický a patří do diferenciální geometrie: pracuje s izotermickými povrchy, klasifikací Bonnetových dvojic, periodickými podmínkami a analytickou konstrukcí. Význam věty lze pochopit bez sledování celého aparátu.

Jak velkou důvěru by měl mít běžný čtenář? Vysokou ve znění věty jako recenzovaného matematického výsledku. Opatrnost se týká výkladu, nikoli důkazní síly: čtete jej jako „tato omezená geometrická data nemusí vždy určit tvar“, ne jako „geometrie nedokáže určovat tvary“.

Zdroje

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>