



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Zwei Tori können dieselbe lokale Geometrie teilen und dennoch verschiedene Gestalten sein

Eine Konstruktion in den Publications mathématiques de l'IHES liefert die ersten kompakten Bonnet-Paare: zwei glatte, reell-analytische Tori im dreidimensionalen Raum, die dieselbe innere Metrik und in einander entsprechenden Punkten dieselbe mittlere Krümmung haben und dennoch bis auf eine starre Bewegung nicht dieselbe Fläche sind. Das Resultat schließt alte Eindeutigkeitsfragen der Flächengeometrie ab, und es ist ein präzises Gegenbeispiel zu einer verlockenden Idee: dass genügend lokale Messungen eine kompakte Gestalt identifizieren müssen.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

Die Form, die sich der Identifizierung verweigert

Stellen Sie sich vor, Sie vermessen eine Fläche, ohne sie verlassen zu dürfen. Sie können Entfernungen entlang der Fläche messen: wie weit ein Punkt von einem anderen entfernt ist, wenn man auf der Fläche selbst reist. Das ist die Metrik der Fläche. Nun fügen Sie eine weitere Messung von außen hinzu: Halten Sie an jedem Punkt die durchschnittliche Krümmung der Fläche fest, ihre mittlere Krümmung.

Das klingt nach viel Information. Für viele Flächen genügt sie. Wenn man die inneren Abstände und die Funktion der mittleren Krümmung kennt, könnte man erwarten, dass die Gestalt im dreidimensionalen Raum festgelegt ist.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann und Andrew Sageman-Furnas haben nun kompakte Flächen konstruiert, die diese Erwartung widerlegen. Ihre Arbeit liefert zwei Tori - donutförmige Flächen, wenn auch keine gewöhnlichen runden Donuts -, die isometrisch sind und in einander entsprechenden Punkten dieselbe mittlere Krümmung besitzen, aber nicht kongruent sind. Man kann die eine nicht durch Drehung, Verschiebung oder Spiegelung in die andere überführen. Es handelt sich um wirklich verschiedene Immersionen im Raum.

In der Sprache des Fachgebiets sind sie kompakte Bonnet-Paare. Die Arbeit bezeichnet sie als die ersten Beispiele dieser Art.

Worin das Problem besteht

Die klassische Flächentheorie trennt zwei Arten von Information.

Die Metrik gibt die auf der Fläche gemessenen Abstände an. Ein zu einem Zylinder gerolltes flaches Blatt behält dieselbe innere Metrik: Eine kleine Ameise, die auf dem Blatt läuft, würde das Aufrollen allein durch Abstandsmessungen nicht bemerken. Die vollständige zweite Fundamentalform sagt viel mehr darüber aus, wie sich die Fläche im Raum krümmt. Der klassische Satz von Bonnet besagt, dass die Immersion bis auf eine starre Bewegung bestimmt ist, wenn die Metrik und die vollständigen Krümmungsdaten die richtigen Verträglichkeitsgleichungen erfüllen.

Doch 1867 stellte Pierre Ossian Bonnet eine schärfere Frage. Was, wenn die Krümmungsdaten reduziert werden? Da die Metrik die Gaußsche Krümmung bereits intrinsisch bestimmt, kann eine Fläche dann durch die Metrik plus die Funktion der mittleren Krümmung charakterisiert werden?

Generisch lautet die Antwort ja. Dieses Wort ist entscheidend. Die Geometrie kennt oft Ausnahmefälle: spezielle Flächen, bei denen die übliche Eindeutigkeitsaussage versagt. Die offene Frage war, ob kompakte glatte Beispiele existieren, bei denen Metrik und mittlere Krümmung übereinstimmen, die Flächen im Raum aber nicht dieselben sind.

Das ist das globale Bonnet-Problem. Die neue Arbeit beantwortet es mit Tori.

Was die Autoren konstruiert haben

Die Autoren konstruieren ein Paar glatter Tori im $\mathbb{R}^3$, die durch eine die mittlere Krümmung erhaltende Isometrie verbunden sind. Das bedeutet, dass einander entsprechende Punkte dieselben inneren Abstände in ihrer Umgebung und denselben Wert der mittleren Krümmung haben, die beiden Flächen aber nicht kongruent sind.

Die Konstruktion leistet mehr, als eine einzelne numerische Kuriosität hervorzubringen. Die Tori sind reell-analytisch - so regulär wie Potenzreihen-Geometrie, keine grob zusammengeflochtenen Objekte -, und die Autoren beweisen, dass ihre Beispiele generisch durch keine Isometrie des umgebenden Raums verbunden sind. Sie geben zudem an, dass ihre Konstruktion überabzählbar viele solcher Paare liefert, weil sie einen funktionalen Parameter enthält.

Der Weg ist technisch. Er nutzt die Beziehung zwischen Bonnet-Paaren und isothermen Flächen, einer Klasse von Flächen mit speziellen Krümmungslinien-Koordinaten. Die Beispiele entstehen, indem man von isothermen Tori mit einer Familie ebener Krümmungslinien ausgeht und eine Konstruktion anwendet, die das Bonnet-Paar erzeugt. Die Autoren berichten, dass der Ansatz aus Computerexperimenten mit einer 5×7 -Quad-Zerlegung eines Torus hervorging, wobei die diskrete Differentialgeometrie als Wegweiser zum glatten Resultat diente.

Das visuelle Ergebnis ist leichter zu erfassen als der Beweis. Die beiden Tori in der Arbeit haben übereinstimmende geometrische Daten, aber eine sichtbar unterschiedliche globale Anordnung: In Abbildung 1 der Autoren sitzen einander entsprechende große "Blasen" auf dem einen Torus näher beieinander als auf dem anderen. Dieser sichtbare Unterschied ist kein Zeichentrick. Der Satz besagt, dass die Flächen im Raum nicht dieselbe Gestalt haben, obwohl die ausgewählten lokalen Daten übereinstimmen.

[figure_pair pending]

Abbildung 1 aus der Arbeit zeigt ein numerisches Beispiel der Bonnet-Paar-Tori, hier als gepaarte Abbildung dargestellt. Die beiden Bilder sind nicht zwei Ansichten desselben Torus: Es sind die beiden verschiedenen Tori des Paares. Die grauen Gitterlinien helfen dem Auge, einander entsprechende Flächenkoordinaten zu verfolgen, während die farbigen Kurven einander entsprechende Krümmungslinien-Schleifen markieren. Der Sinn des Bildes ist die globale Diskrepanz: Die großen Blasen sitzen an sichtbar unterschiedlichen Positionen, obwohl der Satz besagt, dass die beiden Flächen dieselbe innere Metrik und in einander entsprechenden Punkten dieselbe mittlere Krümmung haben.

Warum das kein Widerspruch ist

Das Resultat besagt nicht, dass Geometrie beliebig ist oder dass Messungen nutzlos sind.

Es besagt, dass ein bestimmter reduzierter Datensatz - Metrik plus mittlere Krümmung - nicht immer ausreicht, um eine kompakte Fläche eindeutig zu identifizieren. Der vollständige klassische Eindeutigkeitssatz verwendet reichhaltigere Krümmungsinformation. Die mittlere Krümmung ist nur

ein Durchschnitt der beiden Hauptkrümmungen. Sie sagt, wie stark sich die Fläche in einem Punkt im Mittel krümmt, bewahrt aber nicht die gesamte richtungsabhängige Krümmungsinformation.

Diese Unterscheidung ist der springende Punkt. Zwei Flächen können in den Abständen entlang der Fläche und in der durchschnittlichen Krümmung in jedem entsprechenden Punkt übereinstimmen und sich dennoch darin unterscheiden, wie diese Krümmung im Raum angeordnet ist.

Die Arbeit behauptet auch nicht, dass diese Mehrdeutigkeit typisch ist. Die Einleitung ist sorgfältig: Generisch bestimmt Metrik plus mittlere Krümmung eine Fläche. Bonnet-Paare sind Ausnahmen. Ihr Wert liegt genau darin, dass sie zeigen, dass die Ausnahme in dem kompakten, glatten, analytischen Rahmen existiert, in dem die Frage ungelöst geblieben war.

Welche alten Fragen es abschließt

Die erste abgeschlossene Frage ist das globale Bonnet-Problem: Existieren zwei nicht-kongruente kompakte glatte Immersionen im dreidimensionalen euklidischen Raum, die durch eine Isometrie mit derselben mittleren Krümmung in einander entsprechenden Punkten verbunden sind? Die Autoren antworten mit Ja.

Die zweite ist das Cohn-Vossen-Berger-Problem: Existieren zwei isometrische kompakte analytische Flächen im euklidischen dreidimensionalen Raum, die durch keine Isometrie des umgebenden Raums verbunden sind? Auch hier lautet die Antwort Ja, mit den analytischen Tori, die durch dieselbe Konstruktion gewonnen werden.

Der analytische Teil ist wichtig. Frühere Nicht-Eindeutigkeits-Beispiele für kompakte Flächen konnten sich auf geringere Regularität oder lokale Abänderungen stützen. Diese Tori sind nicht bloß ein glattes Objekt, bei dem in einem Flächenstück eine Beule ausgetauscht wurde. Die Arbeit betont, dass die einander entsprechenden Umgebungen nirgends lokal kongruent sind: Der Unterschied ist über die gesamte Konstruktion verteilt, nicht in einer Reparaturaht versteckt.

Warum es wichtig ist

Das ist reine Mathematik, aber die Intuition trägt weit. Eine Gestalt kann in einem Sinn überbestimmt und in einem anderen dennoch unteridentifiziert sein. Entscheidend ist nicht, wie viele Daten man hat, sondern ob die Daten die richtige Art von Information enthalten.

Metrik plus mittlere Krümmung wirkt stark, weil sie innere Abstände mit einem extrinsischen Krümmungsmaß kombiniert. Das kompakte Bonnet-Paar zeigt die Lücke: Durchschnittliche Krümmung ist nicht vollständige Krümmung. Lokale Übereinstimmung ist nicht immer globale Identifizierung. Analytische Regularität ist keine magische Eindeutigkeitsgarantie.

Das ist eine nützliche Lehre über diesen Satz hinaus. In der Geometrie fragen inverse Probleme oft, ob eine Menge von Messungen das Objekt bestimmt, das sie erzeugt hat. Diese Arbeit gibt eine

scharfe neue Antwort auf ein klassisches Flächenproblem: nicht immer, selbst wenn das Objekt kompakt, glatt und analytisch ist.

Kurz zusammengefasst

Bobenko, Hoffmann und Sageman-Furnas konstruieren die ersten kompakten Bonnet-Paare: zwei nicht-kongruente glatte Tori im $\mathbb{R}^3$, die durch eine Isometrie verbunden sind und in einander entsprechenden Punkten dieselbe mittlere Krümmung haben. Ihre Beispiele sind reell-analytisch und generisch durch keine Isometrie des umgebenden Raums verbunden; damit lösen sie sowohl das globale Bonnet-Problem als auch die analytische Eindeutigkeitsfrage von Cohn-Vossen-Berger, wie in der Arbeit formuliert. Das Resultat stürzt die klassische Flächentheorie nicht um; es zeigt, dass die reduzierten Daten aus Metrik plus mittlerer Krümmung nicht immer ausreichen, um eine kompakte Fläche eindeutig zu identifizieren.

Nüchtern geprüft

Was die Arbeit zeigt: Kompakte glatte Bonnet-Paare existieren. Genauer konstruieren die Autoren explizit Tori im $\mathbb{R}^3$ mit derselben Metrik und derselben Funktion der mittleren Krümmung in einander entsprechenden Punkten, die aber nicht kongruent sind.

Was plausibel, aber nicht der Kern ist: Dass rechnergestützte und diskret-geometrische Erkundung schwierige glatte Konstruktionen anleiten kann. Die Arbeit sagt, dieser Weg sei wichtig gewesen, doch das Resultat beruht auf dem Beweis, nicht auf dem numerischen Bild.

Was sie nicht zeigt: Dass alle oder die meisten Flächen mehrdeutig sind. Die generische Eindeutigkeitsaussage bleibt Teil des Hintergrunds. Dies sind Ausnahmen, aber entscheidende Gegenbeispiele.

Wesentliche Einschränkungen für allgemeine Leser: Der Beweis ist hochtechnisch und lebt in der Differentialgeometrie: isotherme Flächen, Klassifikationen von Bonnet-Paaren, Periodenbedingungen und analytische Konstruktion. Man kann die Bedeutung des Satzes verstehen, ohne der Maschinerie zu folgen.

Wie viel Vertrauen sollten allgemeine Leser haben? Hoch, was die Aussage des Satzes als begutachtetes mathematisches Resultat betrifft. Die richtige Vorsicht ist interpretativ, nicht evidenziell: Lesen Sie es als “diese reduzierten geometrischen Daten bestimmen die Gestalt nicht immer”, nicht als “Geometrie kann Gestalten nicht identifizieren.”

Quellen

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>