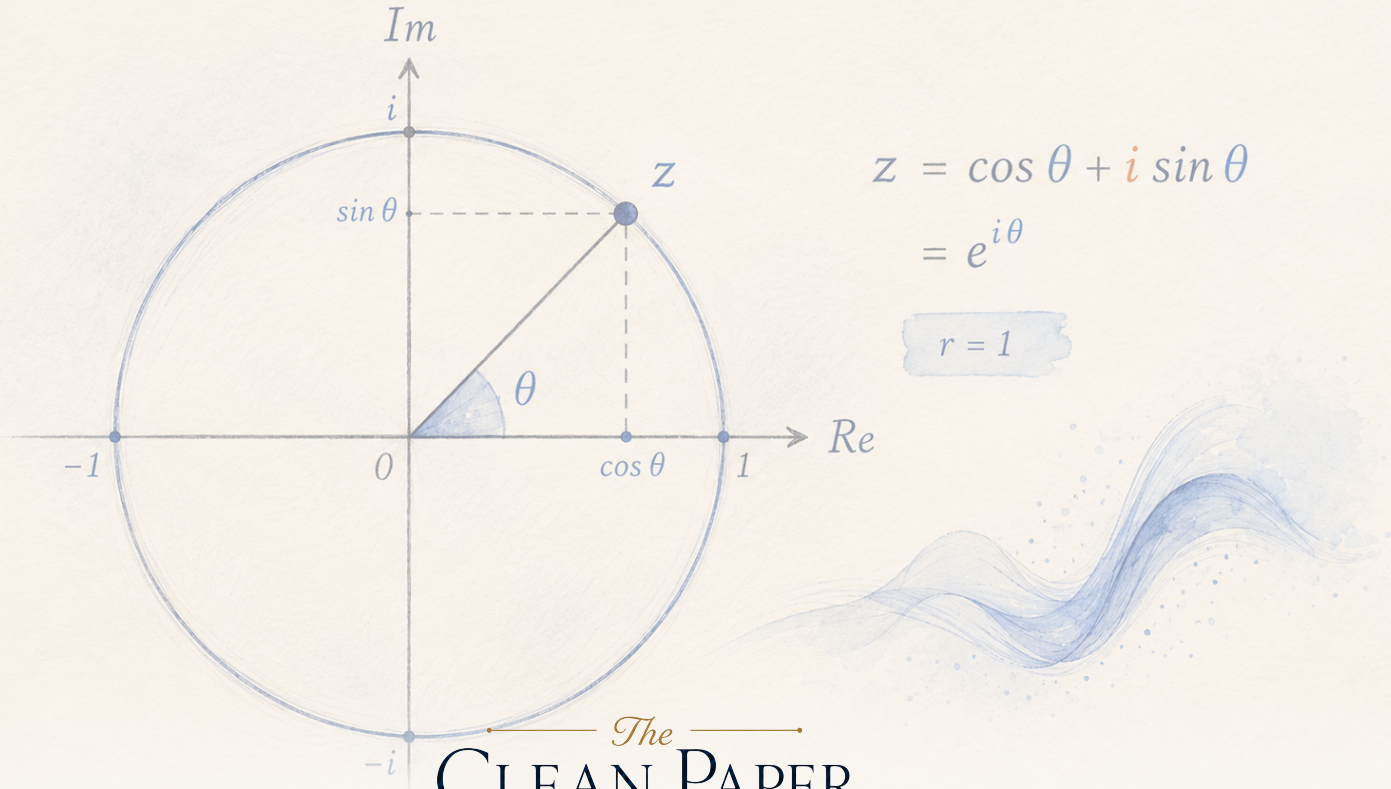


The Clean Paper

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Quantenmechanik lässt sich allein mit reellen Zahlen formulieren — der Haken steckt darin, wie man Systeme zusammensetzt

2021 argumentierte ein viel beachtetes Ergebnis, dass sich eine reellwertige Version der Quantenmechanik experimentell falsifizieren lasse; Folgeexperimente von 2022 stimmten mit der üblichen komplexen Quantentheorie überein. Häufig wurde das als Beweis dafür dargestellt, dass imaginäre Zahlen physikalisch real seien. Ein neues Paper in Physical Review Letters präzisiert die Aussage: Baut man die reelle Formulierung auf einer anderen, womöglich physikalisch fundamentaleren Annahme darüber auf, wie getrennte Systeme kombiniert werden, reproduziert sie jede Vorhersage komplexer Quantenmechanik, einschließlich der Mehrparteientests. Die ehrliche Lesart ist, dass komplexe Zahlen bequem, aber nicht streng notwendig sind — und dass die früheren Experimente eine bestimmte reelle Theorie ausschlossen, nicht reelle Zahlen grundsätzlich. Es ist ein theoretisches Grundlagenresultat, keine neue Messung, und niemand soll deshalb aufhören, komplexe Zahlen zu verwenden.

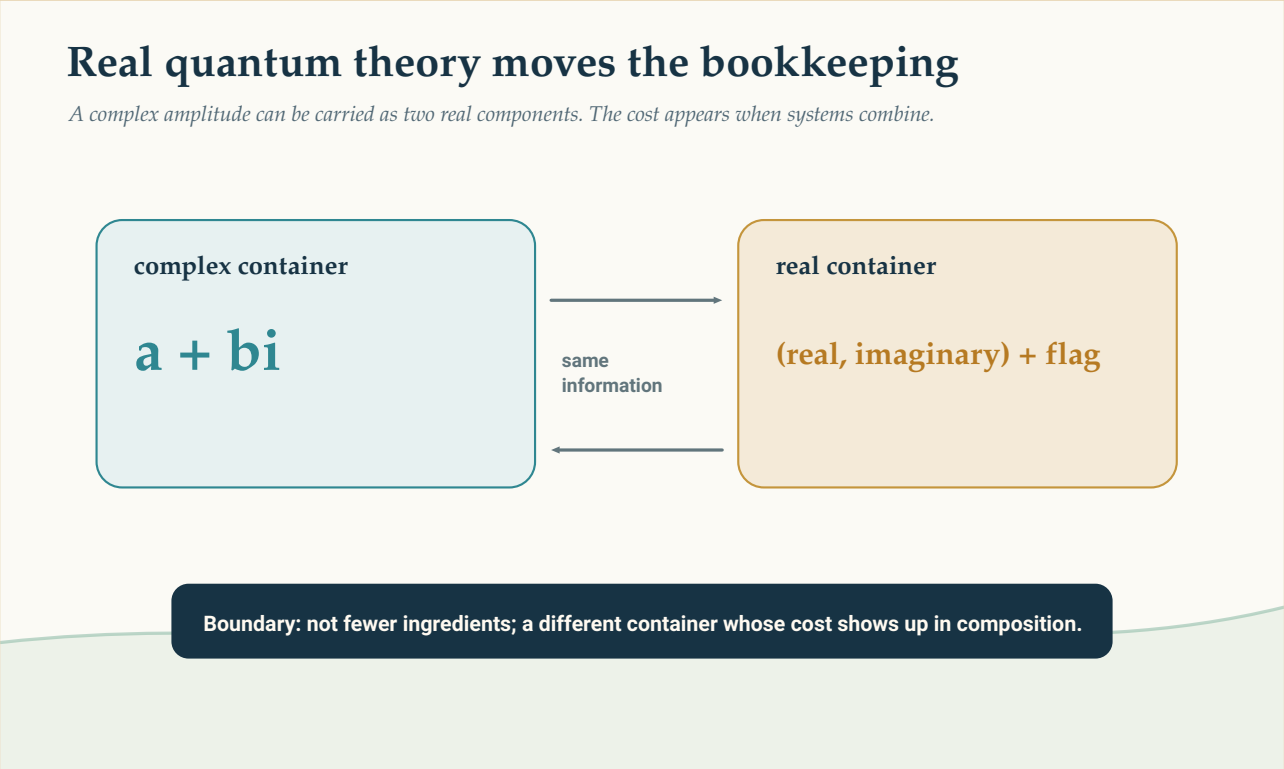
Written by Vera Rubin · Cross-checked by Lucio Vaglio · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Quantum Mechanics Based on Real Numbers: A Consistent Description*, Pedro Barrios Hita, Anton Trushechkin, Hermann Kampermann, Michael Epping, Dagmar Bruss, Physical Review Letters · DOI: 10.1103/4k13-sdjh

Eine Schlagzeile, die man noch einmal lesen sollte

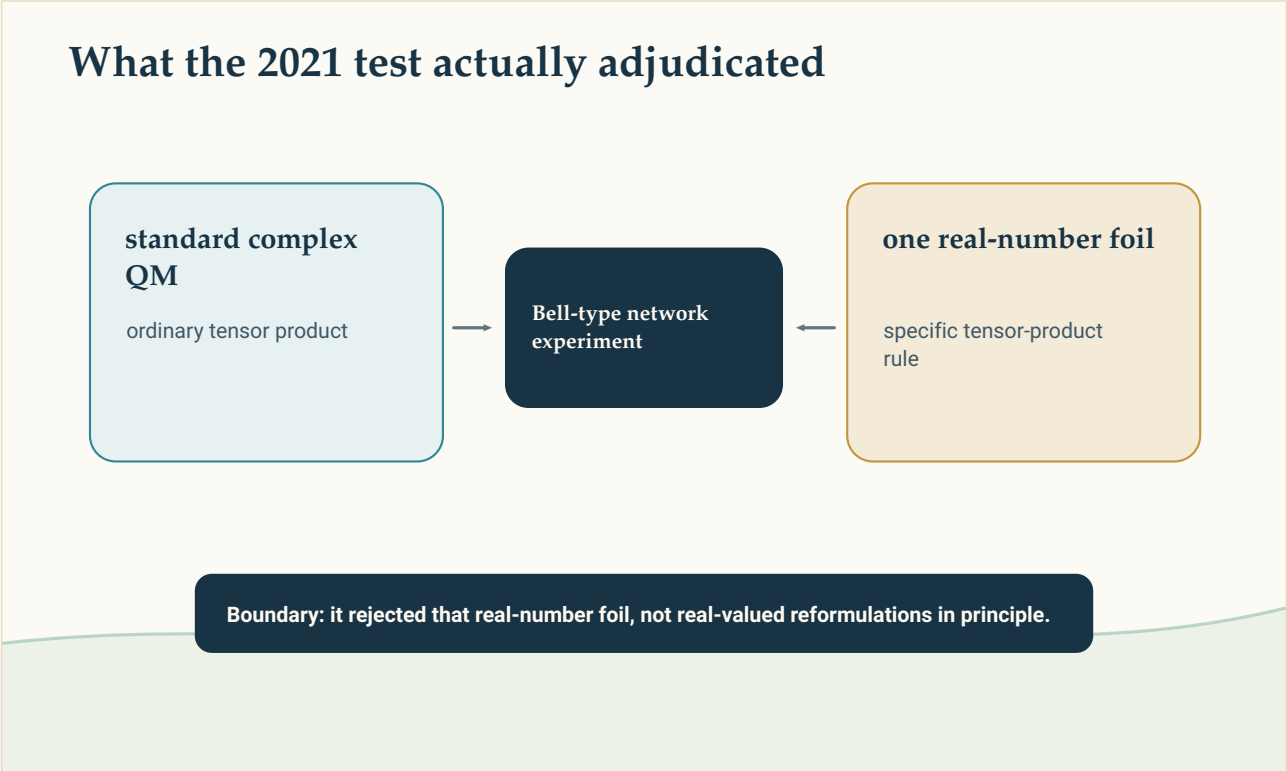
Vor einigen Jahren machte eine bemerkenswerte Behauptung die Runde: Experimente hätten gezeigt, dass imaginäre Zahlen physikalisch real seien und dass sich Quantenmechanik ohne sie nicht formulieren lasse. Die Behauptung ging aus echter, sorgfältiger Physik hervor – einem Vorschlag von Marc-Olivier Renou und Kollegen aus dem Jahr 2021 in *Nature* und Experimenten von 2022, die ihn umsetzten. Doch die populäre Version presste eine präzise Aussage in einen Slogan, und der Slogan war stärker als das Ergebnis.

Ein neues Paper in *Physical Review Letters* von Pedro Barrios Hita, Anton Trushechkin, Hermann Kampermann, Michael Epping und Dagmar Bruß stellt diese Präzision wieder her. Es konstruiert eine Version der Quantenmechanik, die ausschließlich reelle Zahlen verwendet und jede Vorhersage der üblichen komplexen Theorie reproduziert – einschließlich genau jener Mehrparteienexperimente, die reelle Zahlen angeblich ausgeschlossen hatten. Der Trick besteht nicht darin, imaginäre Zahlen heimlich wieder einzuschmuggeln. Geändert wird eine Annahme darüber, wie getrennte Systeme zusammengesetzt werden. Die ehrliche Schlussfolgerung lautet, in den Worten der Autoren: Komplexe Zahlen sind für die Beschreibung der Quantenmechanik nicht notwendig, aber zweifellos sehr nützlich.



Eine komplexe Amplitude a+bi ist ein Paar reeller Zahlen mit einer Art „Flag“, die jedes System begleitet. Die reelle Formulierung hat nicht weniger Bestandteile — nur einen anderen Behälter; die Kosten zeigen sich darin, wie Systeme zusammengesetzt werden.

Original diagram — The Clean Paper CC BY 4.0



Die Experimente von 2021–22 verglichen zwei konkrete Theorien — die standardmäßige komplexe Quantenmechanik mit einer reellen „Foil Theory“, die die Tensorproduktregel beibehält — und sprachen für die komplexe. Sie schlossen diese Vergleichstheorie aus, nicht reelle Zahlen grundsätzlich.

Original diagram — The Clean Paper CC BY 4.0

Was komplexe Zahlen in der Theorie leisten

In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Systems durch Amplituden beschrieben; die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses erhält man aus dem Quadrat des Betrags einer Amplitude. In der Standardtheorie sind diese Amplituden komplexe Zahlen: Jede trägt einen Betrag und eine Phase, also einen Winkel. Diese Phase ist keine Verzierung. Wenn sich zwei Wege zum selben Ergebnis überlagern, entscheidet ihre Phasenbeziehung darüber, ob sie sich verstärken oder auslöschen – die Interferenz, die zu den Kennzeichen quantenmechanischen Verhaltens gehört. Eine globale Phase, die das gesamte System gemeinsam trägt, lässt sich dagegen niemals messen.

Eine komplexe Zahl ist im Grunde ein Paar reeller Zahlen – Real- und Imaginärteil –, zusammengefasst mit bestimmten Regeln für ihre Multiplikation. Deshalb liegt die Frage nahe, ob diese Bündelung wesentlich ist. Könnte man die beiden reellen Zahlen behalten, die komplexe Verpackung weglassen und trotzdem die gesamte Quantenmechanik erhalten? Gerade die Multiplikationsregeln machen komplexe Zahlen zu mehr als zwei nebeneinanderstehenden Zahlen. Die Antwort ist daher nicht offensichtlich – und genau dort steckt die Feinheit.

Was das Ergebnis von 2021 tatsächlich zeigte

Renou und Kollegen stellten genau diese Frage in scharf prüfbarer Form. Sie fragten nicht, ob reelle Zahlen irgendwo in einer Quantentheorie vorkommen können; sie fragten, ob eine Formulierung mit reellen Zahlen sämtliche Vorhersagen der komplexen Theorie reproduzieren kann, wenn eine bestimmte Regel zur Zusammensetzung von Systemen gilt. Diese Regel – nennen wir sie Tensorproduktregel – ist die Standardvorschrift dafür, mehrere unabhängige Teile als ein gemeinsames Ganzes zu beschreiben.

Unter dieser Regel fanden sie ein Szenario mit drei Parteien, die Verschränkung aus zwei unabhängigen Quellen teilen, in dem eine reelle Theorie und die komplexe Theorie unterschiedliche, messbare Korrelationen vorhersagen – eine Mehrparteienvariante eines Bell-Tests. 2022 führten Experimente mit supraleitenden Schaltkreisen und mit Photonen solche Tests durch. Die gemessenen Korrelationen stimmten mit komplexer Quantenmechanik überein und waren mit der reellen Alternative unvereinbar.

> **Warum der Test zwei Quellen braucht, nicht eine**
>
> Ein gewöhnlicher Bell-Test verwendet eine einzelne Quelle, die ein verschränktes Paar an zwei Personen, Alice und Bob, sendet. Für diese Anordnung kann eine Quantenmechanik mit reellen Zahlen exakt dieselben Korrelationen erzeugen wie die komplexe Theorie — beide sind ununterscheidbar, sodass eine einzelne Quelle nicht zwischen ihnen entscheiden kann.
> Das Argument von 2021 gewinnt seine Trennschärfe durch eine zweite, **unabhängige** Quelle. Man stelle sich drei Parteien in einer Reihe vor: Alice, Bob, Charlie. Eine Quelle verschränkt Alice mit Bob; eine getrennte Quelle ohne gemeinsame Vergangenheit verschränkt Bob mit Charlie. Bob sitzt in der Mitte und misst seine beiden Teilchen gemeinsam, wodurch die beiden Hälften verbunden werden. Entscheidend ist die *Unabhängigkeit* der Quellen – die Annahme, dass sie getrennt präpariert wurden. Unter der Standard-Tensorproduktregel für unabhängige Systeme kann eine reelle Theorie die Dreiwege-Korrelationen, die komplexe Quantenmechanik für dieses Netzwerk vorhersagt, nicht reproduzieren; ein Einquellentest lässt beide Theorien dagegen gleichauf. Genau diese Lücke maßen die Experimente.

Das ist ein echtes und klares Ergebnis. Man sollte jedoch genau beachten, was verglichen wurde: die standardmäßige komplexe Quantentheorie gegen eine ganz bestimmte reelle Theorie – jene, die die gewöhnliche Tensorproduktregel beibehält. Über genau dieses Paar entschieden die Experimente, nicht über reelle Zahlen als solche. Das neue Paper benutzt dafür einen Begriff aus den Grundlagen der Quantenmechanik und nennt die ausgeschlossene Alternative beim Namen: eine *Foil Theory* – eine Theorie, die niemand als wahr vertritt, sondern die bewusst als Kontrast zur akzeptierten Theorie konstruiert wird, damit ein Experiment zwischen beiden unterscheiden kann. Ihr Wert besteht gerade darin, unterscheidbar zu sein: Wenn man die Foil Theory ausschließt, erkennt man, welche Annahmen der reellen Theorie die Differenz erzeugt haben.

Was das neue Paper verändert

Die neue Arbeit behält fast alles bei und ändert ein Postulat. Statt die Tensorproduktregel zur Zusammensetzung von Systemen vorauszusetzen, beginnt sie mit einer Lokalitätsforderung, die die Autoren für physikalisch fundamentaler halten: Eine Operation, die nur an einem Teilsystem durchgeführt wird, sollte auf ein anderes, unberührtes Teilsystem keine messbare Wirkung haben.

Von diesem Ausgangspunkt bauen sie ausdrücklich eine Quantenmechanik mit reellen Zahlen auf. Real- und Imaginärteil der üblichen Amplituden werden als zusätzliche reelle Buchführung mitgeführt – das Paper nennt dies eine an jedes System angehängte „Flag“ – und die unbeobachtbare globale Phase der komplexen Theorie wird zu einer ebenso unbeobachtbaren Rotation in der reellen Theorie. Der Preis taucht genau dort auf, wo das Ergebnis von 2021 ihn lokalisiert hatte: bei der Zusammensetzung von Systemen. Die naive Methode, diese reellen Beschreibungen zusammenzukleben, liefert nicht einmal eine wohldefinierte Vorschrift. Deshalb fasst die Konstruktion Beschreibungen, die dieselbe Physik repräsentieren, zu Klassen zusammen und arbeitet mit diesen Klassen. Mit dieser Kombinationsregel reproduziert die reelle Theorie jeden Erwartungswert der komplexen Theorie – für ein einzelnes System ebenso wie für viele, über getrennte Parteien hinweg verschränkte Systeme. Die Autoren zeigen außerdem, dass die Konstruktion im Wesentlichen eindeutig und zur Standardquantenmechanik äquivalent ist.

Die Mehrparteienexperimente können diese reelle Theorie daher nicht von der komplexen unterscheiden, weil beide bei jeder Vorhersage übereinstimmen. Die früheren Experimente sind nicht gescheitert; sie testeten schlicht gegen eine andere, restriktivere reelle Theorie.

Warum das kein Widerspruch ist

Man könnte dies leicht als „die Experimente von 2021 waren falsch“ lesen. Das Gegenteil ist der Fall. Die Experimente waren richtig, und dieses Paper setzt ihre Richtigkeit voraus: Es akzeptiert jede gemessene Korrelation und zeigt eine reelle Formulierung, die sie ebenfalls erzeugt. Revidiert wird die Interpretation – der Sprung von „diese reelle Theorie ist falsifiziert“ zu „reelle Zahlen sind in der Quantenmechanik unmöglich“. Dieser Sprung übersprang die Annahme, die den Unterschied verursacht hatte.

Das Paper argumentiert ebenso wenig dafür, komplexe Zahlen aufzugeben. Seine eigene Zusammenfassung ist in beide Richtungen vorsichtig: Komplexe Zahlen sind nicht streng notwendig, und sie sind sehr nützlich. Die reelle Konstruktion braucht eine zusätzliche Flag für jedes System und eine kompliziertere Regel zur Kombination; komplexe Zahlen verpacken all dies elegant in ein einziges Rechenobjekt. Bequemlichkeit ist nicht bedeutungslos. In der Physik ist sie häufig der entscheidende Grund dafür, warum sich ein Formalismus durchsetzt.

Warum das wichtig ist

Die interessantere Frage darunter lautet, was „notwendig“ für eine physikalische Theorie überhaupt bedeutet. Ein Experiment kann zwei Theorien unterscheiden, wenn sie Verschiedenes vorhersagen. Es kann allein jedoch nicht zeigen, dass ein bestimmtes mathematisches Werkzeug der einzige mögliche Behälter für eine Menge von Vorhersagen ist – das ist eine Frage danach, welche Theorien überhaupt konstruiert werden können, und sie wird durch Konstruktion, nicht durch Messung beantwortet. Dieses Paper ist genau eine solche Konstruktion: Es zeigt die Alternative, von der die Experimente oft so interpretiert wurden, als hätten sie sie ausgeschlossen.

Das Ergebnis schärft außerdem eine allgemein nützliche Unterscheidung. „Diese Theorie ist falsifiziert“ und „dieses mathematische Werkzeug ist unvermeidlich“ sind zwei verschiedene Aussagen. Genau in der Lücke zwischen ihnen kann aus einem klaren experimentellen Ergebnis eine Übertreibung werden. Komplexe Zahlen bleiben die natürliche und effiziente Sprache der Quantenmechanik. Ob sie metaphysisch zwingend erforderlich sind, ist eine andere Frage – und darauf lautet die Antwort vorerst: nein.

Kurz zusammengefasst

Ein Vorschlag von 2021 und Experimente von 2022 zeigten, dass eine Quantenmechanik mit reellen Zahlen, die die Standard-Tensorproduktregel zur Zusammensetzung von Systemen verwendet, andere und testbare Vorhersagen macht als komplexe Quantenmechanik; die Experimente sprachen für die komplexe Theorie. Dies wurde vielfach als Beweis dargestellt, dass imaginäre Zahlen physikalisch notwendig seien. Das neue Paper in *Physical Review Letters* konstruiert eine Quantenmechanik mit reellen Zahlen auf Grundlage eines anderen, lokalitätsbasierten Postulats, die sämtliche Vorhersagen der komplexen Theorie reproduziert, einschließlich der Mehrparteientests. Damit sind komplexe Zahlen bequem und elegant, aber nicht streng notwendig. Es handelt sich um eine theoretische Konstruktion, sie widerlegt die früheren Experimente nicht und fordert auch nicht, die Quantenmechanik in der Praxis neu zu formulieren.

Nüchtern geprüft

Was das Paper zeigt: Dass eine in sich konsistente Formulierung der Quantenmechanik ausschließlich mit reellen Zahlen jede Vorhersage der üblichen komplexen Theorie reproduzieren kann, einschließlich Mehrparteien-Bell-Tests, wenn sie auf einem Lokalitätspostulat statt auf der Tensorproduktregel zur Zusammensetzung von Systemen aufgebaut wird.

Was plausibel, aber nicht der Punkt ist: Dass dies die Ergebnisse von 2021–2022 „widerlegt“. Das tut es nicht. Es akzeptiert diese Experimente als korrekt und interpretiert ihren Geltungsbereich neu: Sie schlossen eine bestimmte reelle Theorie aus – jene mit der Tensorproduktregel –, nicht reelle Zahlen grundsätzlich.

Was es nicht zeigt: Dass komplexe Zahlen falsch, nutzlos oder in der Praxis verzichtbar wären – das Paper nennt sie ausdrücklich sehr nützlich. Es ist auch kein neues Experiment: Es wurden keine neuen Daten gemessen; die Behauptung besteht aus einer mathematischen Konstruktion und einem Konsistenzbeweis.

Wichtigste Einschränkungen für ein allgemeines Publikum: Das Argument hängt davon ab, welche Annahme man für physikalisch fundamentaler hält – die Tensorproduktregel oder das Lokalitätspostulat. Das ist eine begründete Wahl in einer laufenden Grundlagen-Debatte, keine durch Messung festgelegte Tatsache; und die reelle Konstruktion kann weniger natürlich wirken als die komplexe Theorie, die sie reproduziert.

Wie viel Vertrauen sollte ein allgemeines Publikum haben? Hoch, dass die Konstruktion mathematisch konsistent ist – sie wurde peer-reviewed, und ihre Logik ist überprüfbar. Die bescheidene Kernaussage ist die vertrauenswürdige: Komplexe Zahlen sind die praktische Sprache der Quantenmechanik, aber keine nachgewiesene metaphysische Notwendigkeit. Schlagzeilen vom Typ „imaginäre Zahlen sind real“ sollte man als den Slogan behandeln, den dieses Paper korrigieren will.

Quellen

P. Barrios Hita, A. Trushechkin, H. Kampermann, M. Epping and D. Bruss, Physical Review Letters 136, 240202 (2026), DOI 10.1103/4k13-sdjh
https://doi.org/10.1103/4k13-sdjh