



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

दो टोरेस की स्थलीय ज्यामिति समान हो सकती है, फरि भी उनकी वैश्विक आकृति अलग हो सकती है

Publications mathématiques de l'IHÉS में प्रकाशित एक नरिमाण पहली कम्पैक्ट Bonnet जोड़ी देता है: त्रि-आयामी अंतरिक्ष में दो चकित, वस्तु-विक-वश्लेषणत्मक टोरेस, जिनकी अंतरनिहित मीट्रिक और संबंधित बद्धिओं पर औसत वक्रता समान है, फरि भी किसी टोरे गति से वे एक ही सतह नहीं बनते। परिणाम सतह-ज्यामिति के पुराने अद्वितीयता प्रश्न को बंद करता है और एक आकर्षक धारणा का सटीक प्रतुष्टि देता है: पर्याप्त स्थलीय मान किसी कम्पैक्ट आकृति को हमेशा *uniquely* पहचान नहीं सकते।

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, *Publications mathématiques de l'IHÉS* · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

वह आकार जो पहचान में नहीं आता

कल्पना कीजिए कि आपको किसी सतह को मसना है, लेकिन उसके बहर निकलने की अनुमति नहीं है। आप सतह के सन्न-सन्न दूरीमान सकते हैं: अगर एक बिंदु से दूसरे तक उसी सतह पर चलते जाएं तो कतिनी दूरी तय होगी। यही सतह की **मेट्रिक** है। अब बहर से एक और मान जोड़िए: हर बिंदु पर सतह औसतन कतिनी मुड़ी हुई है, यानी उसकी **mean** **वक्रता**।

यह बहुत-सी जानकारी लगती है। बहुत-सी सतहों के लिए यह पर्याप्त भी होती है। अगर आपको आंतरिक दूरियाँ और **mean-curvature** का मसूम हो तो सहज उम्मीद होगी कि तिस-आयामी अंतरिक्ष में आकार निश्चित हो जाएगा।

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann और Andrew Sageman-Furnas ने अब ऐसी कम्पैक्ट सतहें बनाई हैं जो इस उम्मीद को छेती हैं। उनके शोधपत्र में दो **tori** हैं — डोमेट-जैसी सतहें, हलँक सिमरान गोल डोमेट नहीं — जो **isometric** हैं और संबंधित बिंदुओं पर समान **mean** **वक्रता** रखती हैं, लेकिन **congruent** नहीं हैं। एक को घुमकर, खसिककर या प्रतबिविति करके दूसरे में नहीं बदला जा सकता। वे अंतरिक्ष में वस्तुव में अलग **immersions** हैं।

इस क्षेत्र की भाषा में इन्हें **कम्पैक्ट Bonnet** **जोड़ियाँ** कहा जाता है। शोधपत्र इन्हें ऐसे पहले उदहरण बताता है।

समस्या क्या है

शस्त्रीय सतह सदिश दोतरह की जानकारी अलग करती है।

मेट्रिक आपको सतह पर मसीगई दूरियाँ बताती है। एक सपट चदर को बेलन में लपेट दें, तो उसकी **intrinsic** मेट्रिक वही रहती है: सतह पर चलती छेटी-चीटी केवल दूरीमान कर यह नहीं जान पाएगी कि चदर लपेटी गई है। पूरा **second fundamental form** इस बारे में कही अधिक बताता है कि सतह अंतरिक्ष में कैसे मुड़ती है। शस्त्रीय Bonnet प्रमेय कहता है कि अगर मेट्रिक और पूरा मुड़न डेटा उपयुक्त **compatibility equations** को संतुष्ट करें, तो **immersion** कठोर **motion** को छोड़कर निर्धारित हो जाता है।

लेकिन 1867 में Pierre Ossian Bonnet ने अधिक तीखासवस पूछा। अगर मुड़न डेटा कम कर दिया जाए तो? चूँकि मेट्रिक पहले ही **Gaussian** **वक्रता** को **intrinsic** रूप से तय करती है, क्या केवल मेट्रिक और **mean-curvature** का मसूम से सतह की पहचान की जा सकती है?

समस्यतः उत्तर हाँ है। यहाँ “समस्यतः” महत्वपूर्ण है। Geometry में **exceptional** मामले अक्सर होते हैं: ऐसी विशेष सतहें जहाँ समस्य **uniqueness** कथन वफिल हो जाता है। खुला प्रश्न यह था कि क्या कम्पैक्ट, चकिना उदहरण मौजूद हैं जिनमें मेट्रिक और **mean** **वक्रता** समान हो लेकिन अंतरिक्ष में सतहें एक जैसी न हों।

इसे वैश्विक **Bonnet** **समस्या** कहा जाता है। नया शोध **tori** के मध्यम से इसका उत्तर देता है।

लेखकोने क्या बनाया

लेखकोने R^3 में चकिना **tori** की एक जोड़ी बनाई जो **mean-curvature-preserving isometry** से जुड़ी है। इसका मतलब है कि संबंधित बिंदुओं के आसपास **intrinsic distances** समान हैं और **mean** **वक्रता** का मान भी समान है, लेकिन दोनों सतहें **congruent** नहीं हैं।

यह निर्माण केवल एक संख्यत्मक जजिजासापैदा करने से आगे जाता है। ये **tori** **वस्तुविक विश्लेषणत्मक** हैं — यानी **power-**

series geometry जतिने नियमति, न कि खुरदरे ढंग से जोड़े गए वस्तुएँ — और लेखक सन्नति करते हैं कि समस्यतः उनके उदहरण किसी ambient isometry से जुड़े नहीं हैं। वे यह भी बतते हैं कि निर्माण में एक कार्यत्मक पैरामीटर होने के कारण ऐसी जोड़ियाँ uncountably many हैं।

रस्तातकनीक है। इसमें Bonnet जोड़ियाँ और isothermic सतहों के बीच संबंध का उपयोग होता है — ऐसी सतहें जिनके curvature-line coordinates विशेष होते हैं। उदहरण उन isothermic tori से शुरू होते हैं जिनमें वक्रता रेखाएँ का एक परवर्तमान planar है, और फिर एक निर्माण लागू किया जाता है जो Bonnet जोड़ी पैदा करता है। लेखक बतते हैं कि इस तरीके की शुरुआत torus के 5×7 quad decomposition पर computational प्रयोग से हुई थी जहाँ discrete अंतर geometry ने चकिनापरणिम तक पहुँचने का संकेत दिया।

दृश्य नतीजा प्रमाण से अधिक सहज है। शेषपत्र के दो मोनो tori में चुना गया geometric डेटा मेल खाता है, फिर भी उनकी वैश्विक बनसट स्पष्ट रूप से अलग है: लेखकों की चित्र 1 में बड़े “बुलबुले” एक torus में दूसरे की तुलना में एक-दूसरे के अधिक पास दिखाई देते हैं। यह केवल चित्रण का भ्रम नहीं है। प्रमेय कहता है कि अंतरिक्ष में दो सतहें एक ही आकार नहीं हैं, भले ही चुना गया स्थानीय डेटा समान हो।

[figure_pair pending]

शेषपत्र की चित्र 1 Bonnet-pair tori का एक numerical उदहरण दिखाती है, यहाँ paired चित्र के रूप में। दो मोनो panels एक ही torus के दो views नहीं हैं: वे जोड़ी के दो अलग tori हैं। दूसरा mesh रेखाएँ संबंधित सतह coordinates को पहचानने में मदद करती हैं, जबकि रंगीन curves संबंधित curvature-line loops दिखाती हैं। चित्र का मुख्य बंदु वैश्विक mismatch है: बड़े उभार स्पष्ट रूप से अलग स्थानों पर बैठे हैं, जबकि प्रमेय कहता है कि दो सतहों की intrinsic मेट्रिक और संबंधित बंदुओं पर mean वक्रता समान हैं।

यह वरिष्ठमस क्यों नहीं है

नतीजा यह नहीं कहता कि geometry मनमानी है या मान्यता बेकार है।

यह केवल इतना कहता है कि एक विशेष कम किया गया डेटा set — मेट्रिक + mean वक्रता — कम्पैक्ट सतह को हमेशा uniquely पहचानने के लिए पर्याप्त नहीं है। शस्त्रीय uniqueness प्रमेय अधिक समृद्ध मुड़न जमा करी का उपयोग करता है। Mean वक्रता दो principal curvatures का केवल औसत है। यह बतती है कि किसी बंदु पर सतह औसतन कतिनी मुड़ती है, लेकिन दिशा के अनुसार मुड़न की पूरी जमा करी सुरक्षित नहीं रखती।

यही फर्क पूरा मुद्दा है। दो सतहें सतह के भीतर की दूरियों और हर संबंधित बंदु की औसत मुड़न पर सहमत हो सकती हैं, फिर भी अंतरिक्ष में उस मुड़न के वन्य में अलग हो सकती हैं।

शेषपत्र यह भी नहीं कहता कि ऐसी अस्पष्टता समस्य है। प्रस्तुत नासमझी से कहती है: समस्यतः मेट्रिक + mean वक्रता सतह को निर्धारित कर देते हैं। Bonnet जोड़ियाँ exceptional हैं। उनका मूल्य यही है कि वे दिखाते हैं कि कम्पैक्ट, चकिना और विश्लेषणत्मक परिस्थिति में भी वह exception वास्तव में मौजूद है — जहाँ यह सवाल अब तक खुला था।

कैसे-से प्रश्न प्रश्न बंद होते हैं

पहला बंद हमें सलाह प्रश्न वैश्विक Bonnet समस्या है: क्या तीव्र-आयामी Euclidean स्पेस में ऐसे दो non-congruent कम्पैक्ट चकिना immersions मौजूद हैं जो isometry से जुड़े हों और संबंधित बंदुओं पर समान mean वक्रता रखते हों? लेखक उत्तर देते हैं: हाँ।

दूसरा Cohn-Vossen-Berger समस्या है: क्या Euclidean तम- space में ऐसे दो isometric कम्पैक्ट वश्लेषणत्मक सतहें हैं जो किसी ambient isometry से जुड़े न हों? यहाँ भी उत्तर हाँ है, उसी निर्माण से मल्लि वश्लेषणत्मक tori के कारण।

वश्लेषणत्मक हेमामहत्वपूर्ण है। कम्पैक्ट सतहों के पुराने non-uniqueness उदहरण कम regularity या किसी स्थानीय हस्से को बदलने पर निर्भर हो सकते थे। ये tori केवल चकिनावस्तुएँ नहीं हैं जिनमें एक जगह bump बदल दिया गया हो। शोधपत्र जो देता है कि संबंधित neighbourhoods कहीं भी locally congruent नहीं हैं: फर्क पूरी निर्माण में फैला है, किसी patching seam में छपाना ही।

यह क्यों महत्वपूर्ण है

यह pure mathematics है, लेकिन इसकी अंतर्दृष्टि व्यापक है। कई आकार एक अर्थ में बहुत अधिक डेटा से बँधा हुआ लग सकता है और फिर भी दूसरे अर्थ में uniquely पहचाना जा सके। सवाल यह नहीं कि आपके पास कतिना डेटा है; सवाल यह है कि क्या डेटा में सही तरह की जानकारी है।

मेट्रिक + mean वक्रता शक्तिशाली लगता है क्योंकि यह अंदरूनी दूरियों को बहरी मुड़ाने के माप से जोड़ता है। कम्पैक्ट Bonnet जोड़ीबतता है कि कमीकहाँ है: औसत मुड़ाने, पूरा मुड़ाने नहीं है। स्थानीय मेल हमेशा वैश्विक पहचान नहीं देता। वश्लेषणत्मक regularity भी uniqueness की जड़ें गारंटी नहीं है।

यह इस प्रमेय से बहर भी उपयोगी सबक है। Geometry के inverse समस्याएँ अक्सर पूछते हैं कि क्या मामोका कोई set उस वस्तु को uniquely निर्धारित करता है जसिने वे माप पैदा किए। यह शोध एक पुराने सतह समस्या के लिए सटीक नया उत्तर देता है: हमेशा नहीं—तब भी नहीं जब वस्तु कम्पैक्ट, चकिना और वश्लेषणत्मक हो।

संक्षिप्त सार

Bobenko, Hoffmann और Sageman-Furnas ने पहले कम्पैक्ट Bonnet जोड़ियाँ बनाई हैं: R^3 में दो non-congruent चकिना tori जो isometry से जुड़े हैं और संबंधित बद्धियों पर समान mean वक्रता रखते हैं। उनके उदहरण वस्तुविक वश्लेषणत्मक हैं और समान्यतः किसी ambient isometry से जुड़े नहीं होते, जसिसे शोधपत्र में बताए गए वैश्विक Bonnet समस्या और Cohn-Vossen-Berger वश्लेषणत्मक uniqueness प्रश्न दोहोहल होते हैं। नतीजा शस्त्रीय सतह सद्धिंत को उलटताना ही यह दखिता है कि मेट्रिक + mean वक्रता का कम डेटा कम्पैक्ट सतह को हमेशा uniquely पहचानने के लिए पर्याप्त नहीं है।

बनाबदाचदकर जँघ

शोधपत्र क्या दखिता है: कम्पैक्ट चकिना Bonnet जोड़ियाँ मौजूद हैं। अधिक विशेष रूप से, लेखक R^3 में ऐसे tori स्पष्ट रूप से बनते हैं जिनकी मेट्रिक और संबंधित बद्धियों पर mean-curvature का एक समान है, लेकिन वे congruent नहीं हैं।

क्या संभव है लेकिन मुख्य बद्धि नहीं कठनि चकिना constructions तक पहुँचने में computational और discrete-geometric अन्वेषण मदद कर सकती है। लेखक कहते हैं कि यह रस्ता महत्वपूर्ण था लेकिन परिणाम numerical तस्वीर पर नहीं प्रमाण पर टिका है।

यह क्यानहीदखिता क सभियाअधकिंश सतहें ambiguous हैं। Generic uniqueness कथन पृष्ठभूमि में कयम है। ये exceptional लेकिन नर्णयक counterexamples हैं।

समस्य पठक के लिए मुख्य सीमा प्रमाण अत्यधिक तकनीकी है और अंतर geometry की भाषा में है: isothermic सतहें, Bonnet-pair classifications, period स्थितियाँ और विश्लेषणत्मक निर्माण। प्रमेय का अर्थ समझने के लिए पूरीमशीनरी समझना ज़रूरी नहीं।

समस्य पठक को कतिना भरोसा रखना चाहिए? एक peer-समीक्षित गणति परिणाम के रूप में प्रमेय कथन पर उच्च भरोसा। सन्नधनी प्रमाण पर नहीं व्याख्या पर चाहिए: इसे “यह कम geometric डेटा हमेशा आकर तय नहीं करता” की तरह पढ़ें, “geometry shapes की पहचान नहीं कर सकती” की तरह नहीं।

स्रोत

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>