The Clean Paper

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

# Dua torus dapat memiliki geometri lokal yang sama tetapi tetap menjadi bentuk berbeda

*Sebuah konstruksi di Publications mathematiques de l'IHES menghasilkan compact Bonnet pairs pertama: dua torus mulus dan real-analytic di ruang tiga dimensi yang memiliki metrik intrinsik dan kelengkungan rata-rata sama pada titik bersesuaian, tetapi bukan permukaan yang sama hingga gerak kaku. Hasil ini menutup pertanyaan lama tentang keunikan dalam geometri permukaan, dan menjadi counterexample presisi bagi gagasan menggoda bahwa cukup banyak pengukuran lokal pasti mengidentifikasi bentuk kompak.*

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

# Bentuk yang menolak untuk dikenali secara unik

Bayangkan mengukur sebuah permukaan tanpa boleh melangkah ke luar darinya. Anda dapat mengukur jarak di sepanjang permukaan: seberapa jauh satu titik dari titik lain jika perjalanan dilakukan di permukaan itu sendiri. Itulah metrik permukaan. Sekarang tambahkan satu pengukuran dari luar: pada setiap titik, catat rata-rata kelengkungan permukaan, yaitu kelengkungan rata-ratanya.

Kedengarannya seperti banyak informasi. Untuk banyak permukaan, memang cukup. Jika kita mengetahui jarak intrinsik dan fungsi kelengkungan rata-rata, kita mungkin berharap bentuk di ruang tiga dimensi sudah ditentukan secara unik.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann, dan Andrew Sageman-Furnas kini membangun permukaan kompak yang mengalahkan harapan itu. Makalah mereka memberi dua torus — permukaan berbentuk donat, meski bukan donat bulat biasa — yang isometrik dan memiliki kelengkungan rata-rata sama pada titik-titik yang bersesuaian, tetapi tidak kongruen. Kita tidak dapat merotasi, mentranslasi, atau mencerminkan yang satu sehingga menjadi yang lain. Keduanya benar-benar merupakan dua imersi berbeda di ruang.

Dalam bahasa bidang ini, keduanya adalah *compact Bonnet pairs*. Makalah menyebutnya contoh pertama semacam itu.

# Apa masalahnya

Teori permukaan klasik memisahkan dua jenis informasi.

Metrik memberi jarak yang diukur di atas permukaan. Lembaran datar yang digulung menjadi silinder mempertahankan metrik intrinsiknya: semut kecil yang berjalan di lembaran tidak akan mengetahui bahwa lembaran digulung hanya dengan mengukur jarak. *Second fundamental form* lengkap memberi jauh lebih banyak informasi tentang bagaimana permukaan membengkok di ruang. Teorema Bonnet klasik mengatakan bahwa, jika metrik dan data pembengkokan lengkap memenuhi persamaan kompatibilitas yang tepat, imersinya ditentukan hingga gerak kaku.

Namun pada 1867, Pierre Ossian Bonnet mengajukan pertanyaan yang lebih tajam. Bagaimana jika data pembengkokan dikurangi? Karena metrik sudah menentukan kelengkungan Gaussian secara intrinsik, dapatkah permukaan dicirikan oleh metrik ditambah fungsi kelengkungan rata-rata?

Secara generik, jawabannya ya. Kata itu penting. Geometri sering memiliki kasus luar biasa: permukaan khusus tempat pernyataan keunikan biasa gagal. Pertanyaan terbukanya adalah apakah ada contoh kompak dan mulus ketika metrik dan kelengkungan rata-rata sama, tetapi permukaannya berbeda di ruang.

Inilah Global Bonnet Problem. Makalah baru menjawabnya dengan torus.

# Apa yang dibangun para penulis

Para penulis membangun sepasang torus mulus di R3 yang dihubungkan oleh isometri yang mempertahankan kelengkungan rata-rata. Artinya titik-titik yang bersesuaian memiliki jarak intrinsik di sekitarnya yang sama dan nilai kelengkungan rata-rata yang sama, tetapi kedua permukaan tidak kongruen.

Konstruksinya lebih dari satu keanehan numerik. Torus-torus tersebut real-analytic — seteratur geometri deret pangkat, bukan objek kasar hasil tambal-sulam — dan para penulis membuktikan bahwa secara generik contoh mereka tidak dihubungkan oleh isometri ruang ambien apa pun. Mereka juga menyatakan konstruksinya menghasilkan tak terhitung banyaknya pasangan seperti ini karena mengandung parameter fungsional.

Jalur pembuktiannya teknis. Ia memakai hubungan antara Bonnet pairs dan permukaan isothermic, kelas permukaan dengan koordinat garis kelengkungan khusus. Contoh muncul dengan memulai dari torus isothermic yang memiliki satu keluarga garis kelengkungan planar lalu menerapkan konstruksi yang menghasilkan Bonnet pair. Para penulis mengatakan pendekatan ini tumbuh dari eksperimen komputasi pada dekomposisi quad $5\times7$ sebuah torus, menggunakan geometri diferensial diskret sebagai pemandu menuju hasil mulus.

Hasil visualnya lebih mudah dipahami daripada pembuktiannya. Dua torus pada makalah memiliki data geometrik yang sama tetapi penempatan global yang terlihat berbeda: pada Gambar 1 penulis, “gelembung” besar yang bersesuaian berada lebih berdekatan pada satu torus daripada pada yang lain. Perbedaan yang terlihat itu bukan trik gambar. Teoremanya menyatakan permukaan memang bukan bentuk yang sama di ruang, meski data lokal yang dipilih cocok.

[figure_pair pending]

Gambar 1 dari makalah menunjukkan contoh numerik torus Bonnet pair, disajikan sebagai gambar berpasangan. Kedua panel bukan dua sudut pandang dari torus yang sama: keduanya adalah dua torus berbeda dalam pasangan. Garis mesh abu-abu membantu mata mengikuti koordinat permukaan yang bersesuaian, sementara kurva berwarna menandai loop garis kelengkungan yang bersesuaian. Inti gambarnya adalah ketidakcocokan global: gelembung besar berada pada posisi yang tampak berbeda, meski teorema menyatakan kedua permukaan memiliki metrik intrinsik dan kelengkungan rata-rata yang sama pada titik bersesuaian.

# Mengapa ini bukan kontradiksi

Hasil ini tidak mengatakan geometri sewenang-wenang, atau pengukuran tidak berguna.

Ia mengatakan satu set data yang dikurangi — metrik plus kelengkungan rata-rata — tidak selalu cukup untuk mengidentifikasi permukaan kompak secara unik. Teorema keunikan klasik penuh memakai informasi pembengkokan yang lebih kaya. Kelengkungan rata-rata hanya rata-rata dari dua kelengkungan utama. Ia memberi tahu seberapa banyak permukaan membengkok secara rata-rata di suatu titik, tetapi tidak mempertahankan seluruh informasi arah pembengkokan.

Perbedaan itu adalah seluruh inti. Dua permukaan dapat setuju pada jarak di sepanjang permukaan dan rata-rata pembengkokan di setiap titik bersesuaian, tetapi berbeda dalam cara pembengkokan tersebut tersusun di ruang.

Makalah juga tidak mengatakan ambiguitas ini tipikal. Pendahuluannya hati-hati: secara generik, metrik plus kelengkungan rata-rata menentukan permukaan. Bonnet pairs adalah pengecualian. Nilainya justru bahwa mereka menunjukkan pengecualian tersebut memang ada dalam setting kompak, mulus, dan analitik yang sebelumnya belum terpecahkan.

## Pertanyaan lama apa yang ditutup

Pertanyaan pertama yang ditutup adalah Global Bonnet Problem: adakah dua imersi kompak mulus yang tidak kongruen dalam ruang Euclidean tiga dimensi, dihubungkan oleh isometri dan memiliki kelengkungan rata-rata sama pada titik bersesuaian? Para penulis menjawab ya.

Yang kedua adalah masalah Cohn-Vossen-Berger: adakah dua permukaan analitik kompak yang isometrik di ruang Euclidean tiga dimensi tetapi tidak terkait oleh isometri ruang ambien? Sekali lagi jawabannya ya, menggunakan torus analitik dari konstruksi yang sama.

Bagian analitiknya penting. Contoh nonkeunikan sebelumnya untuk permukaan kompak dapat mengandalkan regularitas lebih rendah atau perubahan lokal. Torus ini bukan sekadar objek mulus dengan satu tonjolan ditukar pada satu tambalan. Makalah menekankan bahwa lingkungan yang bersesuaian tidak kongruen secara lokal di mana pun: perbedaannya tersebar di seluruh konstruksi, bukan tersembunyi pada satu jahitan perbaikan.

## Mengapa ini penting

Ini matematika murni, tetapi intuisinya luas. Sebuah bentuk dapat tampak berlebihan datanya dalam satu pengertian tetapi tetap tidak teridentifikasi dalam pengertian lain. Yang penting bukan berapa banyak data yang kita miliki, melainkan apakah datanya mengandung jenis informasi yang tepat.

Metrik plus kelengkungan rata-rata terasa kuat karena menggabungkan jarak internal dengan ukuran pembengkokan ekstrinsik. Compact Bonnet pair menunjukkan celahnya: pembengkokan rata-rata bukan pembengkokan penuh. Kesepakatan lokal tidak selalu berarti identifikasi global. Regularitas analitik bukan jaminan ajaib bagi keunikan.

Itu pelajaran berguna di luar teorema ini. Dalam geometri, inverse problem sering menanyakan apakah suatu kumpulan pengukuran menentukan objek yang menghasilkannya. Makalah ini memberi jawaban baru yang tajam untuk satu masalah permukaan klasik: tidak selalu, bahkan ketika objeknya kompak, mulus, dan analitik.

# Singkatnya

Bobenko, Hoffmann, dan Sageman-Furnas membangun compact Bonnet pairs pertama: dua torus mulus yang tidak kongruen di R3, dihubungkan oleh isometri dan memiliki kelengkungan rata-rata sama pada titik bersesuaian. Contoh mereka real-analytic dan secara generik tidak terkait oleh isometri ruang ambien apa pun, menyelesaikan Global Bonnet Problem serta pertanyaan keunikan analitik Cohn-Vossen-Berger sebagaimana dinyatakan dalam makalah. Hasilnya tidak membatalkan teori permukaan klasik; ia menunjukkan bahwa data yang dikurangi berupa metrik plus kelengkungan rata-rata tidak selalu cukup untuk mengidentifikasi permukaan kompak secara unik.

# Penilaian tanpa berlebihan

**Apa yang ditunjukkan makalah:** Compact smooth Bonnet pairs ada. Lebih spesifik, para penulis secara eksplisit membangun torus di R3 dengan metrik dan fungsi kelengkungan rata-rata yang sama pada titik bersesuaian, tetapi tidak kongruen.

**Apa yang masuk akal tetapi bukan inti hasil:** Bahwa eksplorasi komputasi dan geometri diskret dapat memandu konstruksi mulus yang sulit. Makalah mengatakan jalur ini penting, tetapi hasilnya bertumpu pada pembuktian, bukan gambar numerik.

**Apa yang tidak ditunjukkan:** Bahwa semua atau kebanyakan permukaan ambigu. Pernyataan keunikan generik tetap menjadi latar belakang. Ini counterexample yang luar biasa tetapi menentukan.

**Keterbatasan bagi pembaca umum:** Pembuktiannya sangat teknis dan berada dalam geometri diferensial: permukaan isothermic, klasifikasi Bonnet pair, syarat periodisitas, dan konstruksi analitik. Makna teorema dapat dipahami tanpa mengikuti seluruh mesin tersebut.

**Seberapa besar keyakinan yang sebaiknya dimiliki pembaca umum?** Tinggi pada pernyataan teorema sebagai hasil matematika yang telah ditelaah sejawat. Kehati-hatiannya bersifat interpretatif, bukan evidensial: baca sebagai “data geometrik yang dikurangi ini tidak selalu menentukan bentuk”, bukan “geometri tidak dapat mengidentifikasi bentuk”.

## Sumber

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z
https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335
https://arxiv.org/abs/2110.06335