The Clean Paper

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

同じ局所幾何を共有しながら、異なる形でありうる 2 つのトーラス

Publications mathematiques de l'IHES に掲載された構成により、初めてのコンパクトな *Bonnet* 対が示された。これは、3 次元空間内にある、対応する点で同じ内在的計量と同じ平均曲率を持ちながら、剛体運動を除いて同じ表面ではない、2 つの滑らかで実解析的なトーラスである。この結果は、曲面幾何学における古い一意性問題に決着をつけるとともに、十分な局所測定があればコンパクトな形を同定できるはずだという、もっともらしい考えに対する精密な反例となっている。

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

同定を拒む形

外側に出ることが許されないまま、曲面を測定すると想像してみてください。曲面に沿った距離、つまり曲面そのものの上を移動したときの、ある点から別の点までの距離を測ることはできます。これが曲面の計量です。そこに、外側からのもう一つの測定を加えます。各点で、曲面の平均的な曲がり、すなわち平均曲率を記録するのです。

これはかなり多くの情報に思えます。多くの曲面では、それで十分です。内在的な距離と平均曲率関数がわかれば、三次元空間内の形は決まるはずだ、と考えたくなるでしょう。

Alexander Bobenko、Tim Hoffmann、Andrew Sageman-Furnas は、この予想を覆すコンパクトな曲面を今回構成しました。彼らの論文は、等長で、対応する点における平均曲率も同じだが、合同ではない二つのトーラス —— ドーナツ形の曲面ですが、普通の丸いドーナツではありません —— を示しています。一方を回転、平行移動、または反転させても、もう一方とは重なりません。これらは空間内の、真に異なるはめ込みです。

この分野の用語では、これらはコンパクトな Bonnet 対です。論文は、このような例としては初めてだと述べています。

問題は何か

古典的な曲面論では、情報を二種類に分けます。

計量は、曲面上で測った距離を教えます。平らなシートを円柱に巻いても、同じ内在的計量が保たれます。シートの上を歩く小さなアリは、距離だけを測っている限り、巻かれたことに気づかないでしょう。完全な第二基本形式は、曲面が空間内でどのように曲がっているかについて、はるかに多くを教えます。古典的なBonnet の定理によれば、計量と完全な曲げのデータが適切な整合条件を満たしていれば、はめ込みは剛体運動を除いて決まります。

しかし 1867 年、Pierre Ossian Bonnet は、より鋭い問いを提起しました。曲げのデータを減らしたらどうなるでしょうか。ガウス曲率はすでに内在的に計量から決まるのだから、曲面は計量と平均曲率関数によって特徴づけられるのでしょうか。

一般には、答えはイエスです。この「一般には」という言葉が重要です。幾何学には、通常の一意性の主張が成り立たない特殊な曲面という、例外的な場合がしばしばあります。未解決だったのは、計量と平均曲率が一致するにもかかわらず、空間内で同じではないコンパクトで滑らかな例が存在するかどうかでした。

これが Global Bonnet Problem です。新しい論文は、トーラスによってこの問題に答えています。

著者たちが構成したもの

著者たちは、平均曲率を保つ等長写像によって関係づけられた、滑らかなトーラスの対を構成しました。つまり、対応する点の周囲における内在的な距離が同じで、平均曲率の値も同じですが、二つの曲面は合同ではありません。

この構成は、単一の数値的な珍例を生み出すだけではありません。トーラスは実解析的です —— べき級数による幾何学と同程度に正則であり、粗い継ぎはぎの物体ではありません —— そして著者たちは、一般にはその例がいかなる周囲空間の等長変換によっても関係づけられないことを証明しています。また、この構成には関数パラメータが含まれているため、そのような対を非可算個与えると述べています。

道筋は技術的です。特殊な曲率線座標を持つ曲面のクラスである、等温曲面と Bonnet 対の関係を利用します。例は、曲率線の一方の族が平面曲線となる等温トーラスから出発し、Bonnet 対を生み出す構成を適用することで得られます。著者たちによれば、このアプローチは、トーラスの 5x7 四辺形分解を用いた計算実験から発展したもので、離散微分幾何学を滑らかな結果へ向かう指針として使いました。

視覚的な結果は、証明よりも理解しやすいでしょう。論文中の二つのトーラスは幾何学的データが一致していますが、全体としての配置は目に見えて異なります。著者たちの Figure 1 では、対応する大きな「泡」が、一方のトーラスでは他方より近い位置にあります。この目に見える違いは、描画上のトリックではありません。定理が述べるのは、選ばれた局所データが一致しているにもかかわらず、空間内の曲面は同じ形状ではないということです。

[figure_pair pending]

論文の Figure 1 は、Bonnet 対をなすトーラスの数値例を示したもので、ここでは対になった図として掲載しています。二つのパネルは同じトーラスを別の角度から見たものではありません。対をなす二つの異なるトーラスです。灰色のメッシュ線は、対応する曲面座標を目で追う助けになり、色の付いた曲線は対応する曲率線のループを示しています。この図の要点は、全体的な不一致です。大きな泡は明らかに異なる位置にありますが、定理によれば、二つの曲面は同じ内在的計量を持ち、対応する点で同じ平均曲率を持ちます。

なぜこれは矛盾ではないのか

この結果は、幾何学が恣意的であるとか、測定が役に立たないとか、言っているのではありません。

特定の縮約されたデータ集合 —— 計量と平均曲率 —— だけでは、コンパクトな曲面を常に一意に同定できるわけではない、と述べているのです。古典的な完全な一意性定理は、より豊かな曲げの情報を使います。平均曲率は二つの主曲率の平均にすぎません。ある点で曲面が平均的にどれだけ曲がっているかは教えますが、方向ごとの曲げに関するすべての情報を保持しているわけではありません。

この区別が全体の要点です。二つの曲面は、曲面に沿った距離と、対応する各点での平均的な曲げについて一致しながら、その曲げが空間内に配置される仕方では異なることができます。

この論文も、この曖昧さが典型的だとは述べていません。序論は慎重です。一般には、計量と平均曲率によって曲面は決まります。Bonnet 対は例外です。その価値はまさに、未解決のまま残っていたコンパクトで滑らか、かつ解析的な設定において、その例外が存在することを示した点にあります。

どの古い問題に決着をつけたのか

第一に決着した問題は Global Bonnet Problem です。三次元ユークリッド空間内に、合同ではない二つのコンパクトな滑らかなはめ込みで、等長写像によって関係づけられ、対応する点で同じ平均曲率を持つものが存在するか、という問題です。著者たちの答えはイエスです。

第二は Cohn-Vossen-Berger 問題です。ユークリッド三次元空間内に、等長なコンパクト解析的曲面でありながら、周囲空間の等長変換によって関係づけられないものが存在するか、という問題です。ここでも答えはイエスです。同じ構成によって得られる解析的トーラスを使います。

解析性の部分は重要です。コンパクトな曲面についての以前の非一意性の例は、より低い正則性や局所的な変更に依存することがありました。これらのトーラスは、あるパッチにこぶを付け替えただけの滑らかな物体ではありません。論文は、対応する近傍がどこでも局所的に合同ではないことを強調しています。違いは構成全体に広がっており、修復の継ぎ目に隠れているのではありません。

なぜ重要なのか

これは純粋数学ですが、直観は広く応用できます。ある意味では形に過剰なデータがあっても、別の意味では同定が不十分なことがあります。重要なのはデータの量ではなく、そのデータが適切な種類の情報を含んでいるかどうかです。

計量と平均曲率の組み合わせが強力に感じられるのは、内部の距離と外在的な曲げの尺度を組み合わせるからです。コンパクトな Bonnet 対は、その間隙を示します。平均的な曲げは、完全な曲げではありません。局所的な一致は、常に全体の同定を意味するわけではありません。解析的な正則性は、唯一性を保証する魔法ではありません。

これは、この定理を超えて役立つ教訓です。幾何学では、逆問題によって、ある測定の集合が、それを生み出した対象を決定するかどうかを問うことがよくあります。この論文は、古典的なある曲面問題に対して、鋭い新しい答えを与えています。対象がコンパクトで、滑らかで、解析的であっても、常にそうとは限りません。

要点

Bobenko、Hoffmann、Sageman-Furnas は、初めてのコンパクトな Bonnet 対を構成しました。それは、等長写像によって関係づけられ、対応する点で同じ平均曲率を持つ一方、合同ではない、R3 内の二つの滑らかなトーラスです。彼らの例は実解析的であり、一般にはいかなる周囲空間の等長

変換によっても関係づけられません。これにより、論文で述べられている Global Bonnet Problem と Cohn-Vossen-Berger の解析的一意性問題の双方が解決されます。この結果は古典的な曲面論を覆すものではありません。計量と平均曲率という縮約されたデータだけでは、コンパクトな曲面を常に一意に同定できるわけではないことを示しているのです。

冷静に見ると

論文が示していること：コンパクトで滑らかな Bonnet 対が存在します。より具体的には、著者たちは R3 内に、対応する点で同じ計量と平均曲率関数を持ちながら、合同ではないトーラスを明示的に構成しています。

もっともらしいが、主眼ではないこと：計算的・離散幾何学的な探索が、難しい滑らかな構成を導く手がかりになりうるということです。論文はこの道筋が重要だったと述べていますが、結果を支えるのは数値的な図ではなく証明です。

示していないこと：すべての、あるいは大半の曲面が曖昧だということです。一般的な一意性の主張は、背景の一部としてなお有効です。これらは例外的ではありますが、決定的な反例です。

一般読者にとっての主な限界：証明は非常に技術的で、微分幾何学 —— 等温曲面、Bonnet 対の分類、周期条件、解析的構成 —— の中で展開されます。読者は、その仕組みを追わなくても定理の意味を理解できます。

一般読者はどの程度確信してよいか：査読済みの数学的成果としての定理の記述については、高い確信を持ってよいでしょう。適切な注意点は証拠ではなく解釈に関するものです。これは「この縮約された幾何学的データは、形を常に決定するわけではない」と読むべきであり、「幾何学は形を同定できない」と読むべきではありません。

出典

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z
https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335
https://arxiv.org/abs/2110.06335