The Clean Paper

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

# ორ ტორს შეიძლება ერთი და იგივე ადგილობრივი გეომეტრია ჰქონდეს და მაინც სხვადასხვა ფორმა იყოს

*Publications mathématiques de l'IHES-ში გამოქვეყნებული კონსტრუქცია პირველ კომპაქტურ ბონეს წყვილებს გვაძლევს: სამგანზომილებიან სივრცეში ორ გლუვ, რეალურად ანალიზურ ტორს, რომლებსაც შესაბამის წერტილებში ერთი და იგივე შიდა მეტრიკა და საშუალო სიმრუდე აქვს, თუმცა მყარ მოძრაობამდე ერთი და იგივე ზედაპირი არ არის. შედეგი ზედაპირების გეომეტრიაში ძველ უნიკალურობის კითხვებს ხურავს და ზუსტი კონტრმაგალითია მაცდური იდეისთვის, თითქოს საკმარისი რაოდენობის ადგილობრივი გაზომვა კომპაქტურ ფორმას აუცილებლად ამოიცნობს.*

---

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

# ფორმა, რომლის ამოცნობაც ამ მონაცემებით შეუძლებელია

წარმოიდგინეთ, რომ ზედაპირის გაზომვა გინდათ, მაგრამ მის გარეთ გასვლის უფლება არ გაქვთ. შეგიძლიათ გაზომოთ მანძილები თვით ზედაპირის გასწვრივ: რამდენად შორსაა ერთი წერტილი მეორისგან, თუ გზას ზედაპირიდან არ გადაუხვევთ. ამას ზედაპირის მეტრიკა აღწერს. ახლა გარედან კიდევ ერთი გაზომვა დავამატოთ: თითოეულ წერტილში ჩავიწეროთ ზედაპირის საშუალო მოხრა — მისი საშუალო სიმრუდე.

ეს უკვე ძალიან ბევრ ინფორმაციად ჟღერს. მრავალი ზედაპირისთვის მართლაც საკმარისია. თუ იცით შიდა მანძილები და საშუალო სიმრუდის ფუნქცია, ბუნებრივია იფიქროთ, რომ სამგანზომილებიან სივრცეში ფორმაც ერთმნიშვნელოვნად უნდა განისაზღვროს.

Alexander Bobenko-მ, Tim Hoffmann-მა და Andrew Sageman-Furnas-მა ახლა ააგეს კომპაქტური ზედაპირები, რომლებიც ამ მოლოდინს არღვევს. მათ ნაშრომში მოცემულია ორი ტორი — დონატის მსგავსი ზედაპირები, თუმცა არა ჩვეულებრივი მრგვალი დონატები — რომლებიც იზომეტრულია და შესაბამის წერტილებში ერთნაირი საშუალო სიმრუდე აქვს, მაგრამ კონგრუენტული არ არის. ერთი მეორედ ვერ გადაიქცევა არც ბრუნვით, არც გადაადგილებით და არც არეკვლით. ისინი სივრცეში მართლაც განსხვავებული ჩაშვებებია.

ამ დარგის ენაზე მათ **კომპაქტურ ბონეს წყვილებს** უწოდებენ. ავტორების თქმით, ეს ასეთი წყვილების პირველი მაგალითებია.

# რა პრობლემაზეა საუბარი

ზედაპირების კლასიკური თეორია ინფორმაციის ორ სახეს ერთმანეთისგან განასხვავებს.

**მეტრიკა** ზედაპირზე გაზომილ მანძილებს აღწერს. ბრტყელი ფურცელი ცილინდრად რომ დაგრაგნოთ, მისი შიდა მეტრიკა არ იცვლება: ფურცელზე მცოცავი პატარა ჭიანჭველა მხოლოდ მანძილების გაზომვით ვერ მიხვდება, რომ ფურცელი მოხრილია. სრული **მეორე ფუნდამენტური ფორმა** კი ბევრად მეტს გვეუბნება იმაზე, როგორ იხრება ზედაპირი სივრცეში. კლასიკური ბონეს თეორემა ამბობს, რომ თუ მეტრიკა და სრული მოხრის მონაცემები შესაბამის თავსებადობის განტოლებებს აკმაყოფილებს, ჩაშვება მყარ მოძრაობამდე ერთმნიშვნელოვნად განისაზღვრება.

მაგრამ 1867 წელს Pierre Ossian Bonnet-მა უფრო მკვეთრი კითხვა დასვა. რა მოხდება, თუ მოხრის შესახებ მონაცემს შევამცირებთ? რადგან მეტრიკა გაუსის სიმრუდეს უკვე შიგნიდან განსაზღვრავს, შეიძლება თუ არა ზედაპირის დახასიათება მხოლოდ მეტრიკითა და საშუალო სიმრუდის ფუნქციით?

ზოგად შემთხვევაში პასუხი „კი“ არის. სწორედ სიტყვა „ზოგად“ არის მნიშვნელოვანი.

გეომეტრიაში ხშირად არსებობს გამონაკლისი შემთხვევები — განსაკუთრებული ზედაპირები, სადაც ჩვეულებრივი უნიკალურობა ირღვევა. ღია კითხვა იყო, არსებობდა თუ არა კომპაქტური, გლუვი მაგალითები, რომლებშიც მეტრიკა და საშუალო სიმრუდე ემთხვევა, მაგრამ სივრცეში თვით ზედაპირები მაინც განსხვავებულია.

ეს არის **გლობალური ბონეს პრობლემა**. ახალი ნაშრომი მას ტორების საშუალებით პასუხობს.

# რა ააგეს ავტორებმა

ავტორები R3-ში აგებენ გლუვი ტორების წყვილს, რომლებსაც ერთმანეთთან საშუალო-სიმრუდის შემნახველი იზომეტრია აკავშირებს. ეს ნიშნავს, რომ შესაბამის წერტილებში მათ გარშემო შიდა მანძილები ერთნაირია და საშუალო სიმრუდის მნიშვნელობაც ემთხვევა, თუმცა ორი ზედაპირი კონგრუენტული არ არის.

კონსტრუქცია მხოლოდ ერთ რიცხვით უცნაურობას არ იძლევა. ტორები **რეალურად ანალიზურია** — ისეთივე რეგულარული, როგორიც ხარისხობრივ მწკრივებზე დაფუძნებული გეომეტრიაა, და არა უხეშად შეწებებული ობიექტები — ხოლო ავტორები ამტკიცებენ, რომ ზოგად შემთხვევაში მათი მაგალითები გარემომცველი სივრცის არც ერთი იზომეტრიით არ არის დაკავშირებული. ისინი ასევე წერენ, რომ კონსტრუქცია დაუთვლელად ბევრ ასეთ წყვილს იძლევა, რადგან მასში ფუნქციური პარამეტრი შედის.

ტექნიკური გზა რთულია. ის იყენებს ბონეს წყვილებსა და **იზოთერმულ ზედაპირებს** შორის კავშირს — ზედაპირების კლასს, რომელსაც სიმრუდის ხაზებისთვის განსაკუთრებული კოორდინატები აქვს. მაგალითები მიიღება იზოთერმული ტორებიდან, რომელთა სიმრუდის ხაზების ერთი ოჯახი ბრტყელია, და შემდეგ კონსტრუქციით, რომელიც ბონეს წყვილს წარმოქმნის. ავტორების თქმით, მიდგომა წარმოიშვა ტორის 5×7 ოთხკუთხედურ დაყოფაზე ჩატარებული გამოთვლითი ექსპერიმენტებიდან; დისკრეტული დიფერენციალური გეომეტრია მათ გლუვი შედეგისკენ გზამკვლევად გამოიყენეს.

ვიზუალური შედეგი მტკიცებულებაზე გაცილებით ადვილი აღსაქმელია. ნაშრომში ორი ტორი შერჩეულ გეომეტრიულ მონაცემებში ემთხვევა, მაგრამ მთლიანად სივრცეში აშკარად განსხვავებულადაა განლაგებული: ავტორების Figure 1-ში შესაბამისი დიდი „ბუშტები“ ერთ ტორზე ერთმანეთთან უფრო ახლოსაა, ვიდრე მეორეზე. ეს განსხვავება ნახატის ხრიკი არ არის. თეორემა ამბობს, რომ ზედაპირები სივრცეში ერთი და იგივე ფორმა ნამდვილად არაა, მიუხედავად იმისა, რომ არჩეული ადგილობრივი მონაცემები ემთხვევა.

[figure_pair pending]

ნაშრომის Figure 1 ბონეს წყვილის ტორების რიცხვით მაგალითს ორ პანელად აჩვენებს. ეს ერთი და იმავე ტორის ორი ხედვა არაა: პანელებზე წყვილის ორი განსხვავებული ტორია. ნაცრისფერი ბადის ხაზები შესაბამის ზედაპირულ კოორდინატებს თვალით მიყოლას

ამარტივებს, ფერადი მრუდები კი შესაბამის სიმრუდის-ხაზის მარყუჟებს აღნიშნავს. სურათის მთავარი აზრი გლობალური შეუსაბამობაა: დიდი „ბუშტები“ აშკარად სხვადასხვა ადგილას ზის, მიუხედავად იმისა, რომ თეორემის მიხედვით შესაბამის წერტილებში ორ ზედაპირს ერთი და იგივე შიდა მეტრიკა და საშუალო სიმრუდე აქვს.

# რატომ არ არის ეს წინააღმდეგობა

შედეგი არ ამბობს, რომ გეომეტრია თვითნებურია ან გაზომვები უსარგებლოა.

ის ამბობს, რომ მონაცემთა კონკრეტული, შემცირებული ნაკრები — მეტრიკა პლუს საშუალო სიმრუდე — ყოველთვის საკმარისი არ არის კომპაქტური ზედაპირის ერთმნიშვნელოვნად ამოსაცნობად. კლასიკური უნიკალურობის სრული თეორემა უფრო მდიდარ ინფორმაციას იყენებს. საშუალო სიმრუდე ორი მთავარი სიმრუდის მხოლოდ საშუალოა. ის გვიჩვენებს, საშუალოდ რამდენად იხრება ზედაპირი წერტილში, მაგრამ მიმართულებაზე დამოკიდებულ მოხრის მთელ ინფორმაციას არ ინახავს.

სწორედ ეს განსხვავებაა შედეგის არსი. ორ ზედაპირს შეიძლება ემთხვეოდეს ზედაპირის გასწვრივ ყველა შესაბამისი მანძილი და ყოველ შესაბამის წერტილში საშუალო მოხრა, მაგრამ სივრცეში ეს მოხრა განსხვავებული გზით იყოს განაწილებული.

ნაშრომი არც იმას ამბობს, რომ ასეთი ორაზროვნება ჩვეულებრივი მოვლენაა. შესავალი ფრთხილად აღნიშნავს: ზოგად შემთხვევაში მეტრიკა და საშუალო სიმრუდე ზედაპირს განსაზღვრავს. ბონეს წყვილები გამონაკლისებია. მათი მნიშვნელობა სწორედ ისაა, რომ აჩვენებს — ასეთი გამონაკლისი არსებობს კომპაქტურ, გლუვ და ანალიზურ გარემოშიც, სადაც კითხვა მანამდე გადაუჭრელი იყო.

# რომელ ძველ კითხვებს პასუხობს

პირველი არის **გლობალური ბონეს პრობლემა**: არსებობს თუ არა სამგანზომილებიან ევკლიდურ სივრცეში ორი არაკონგრუენტული კომპაქტური გლუვი ჩაშვება, რომლებიც იზომეტრიითაა დაკავშირებული და შესაბამის წერტილებში ერთნაირი საშუალო სიმრუდე აქვს? ავტორების პასუხია — დიახ.

მეორეა **Cohn-Vossen-Berger-ის პრობლემა**: არსებობს თუ არა ევკლიდურ სამგანზომილებიან სივრცეში ორი იზომეტრული კომპაქტური ანალიზური ზედაპირი, რომლებიც გარემომცველი სივრცის იზომეტრიით ერთმანეთს არ უკავშირდება? იგივე კონსტრუქციით მიღებული ანალიზური ტორები აქაც დადებით პასუხს იძლევა.

ანალიზურობა მნიშვნელოვანია. კომპაქტური ზედაპირების უფრო ძველი არაუნიკალურობის მაგალითები ზოგჯერ დაბალ რეგულარულობას ან ადგილობრივ ცვლილებებს ეყრდნობოდა. ეს ტორები უბრალოდ გლუვი ობიექტები არ არის, რომლებშიც ერთი პატარა უბანი სხვა „ბორცვით“ ჩაანაცვლეს. ნაშრომი ხაზს უსვამს, რომ შესაბამისი მეზობლობები არსადაა ადგილობრივად კონგრუენტული: განსხვავება მთელი კონსტრუქციის

მასშტაბზეა გავრცელებული და არა ერთ ნაკერში დამალული.

## რატომ არის ეს მნიშვნელოვანი

ეს წმინდა მათემატიკაა, მაგრამ ინტუიცია უფრო ფართოა. ფორმა შეიძლება ერთი ტიპის მონაცემებით თითქოს ზედმეტადაც კი იყოს აღწერილი და მაინც სხვა თვალსაზრისით არასაკმარისად იდენტიფიცირებული დარჩეს. მნიშვნელობა არა მხოლოდ მონაცემების რაოდენობას აქვს, არამედ იმას, შეიცავს თუ არა ის საჭირო სახის ინფორმაციას.

მეტრიკა პლუს საშუალო სიმრუდე ძლიერ მონაცემად გვეჩვენება, რადგან შიდა მანძილებს გარე მოხრის საზომთან აერთიანებს. კომპაქტური ბონეს წყვილი ზუსტად ამ ხარვეზს აჩვენებს: საშუალო მოხრა სრული მოხრა არ არის. ადგილობრივი დამთხვევა ყოველთვის გლობალურ იდენტობას არ ნიშნავს. ანალიზური რეგულარულობაც უნიკალურობის ჯადოსნური გარანტია არაა.

ეს გაკვეთილი ამ კონკრეტულ თეორემასაც სცდება. გეომეტრიაში შებრუნებული ამოცანები ხშირად სვამს კითხვას: განსაზღვრავს თუ არა გაზომვების ნაკრები იმ ობიექტს, რომელმაც ეს გაზომვები წარმოქმნა? ამ ნაშრომს ერთი კლასიკური ზედაპირის ამოცანისთვის მკაფიო ახალი პასუხი აქვს: ყოველთვის არა — მაშინაც კი, როცა ობიექტი კომპაქტური, გლუვი და ანალიზურია.

## მოკლე შეჯამება

Bobenko, Hoffmann და Sageman-Furnas აგებენ პირველ კომპაქტურ ბონეს წყვილებს: R3-ში ორ არაკონგრუენტულ გლუვ ტორს, რომლებიც იზომეტრიითაა დაკავშირებული და შესაბამის წერტილებში ერთნაირი საშუალო სიმრუდე აქვს. მათი მაგალითები რეალურად ანალიზურია და ზოგად შემთხვევაში გარემომცველი სივრცის არც ერთი იზომეტრიით არ არის დაკავშირებული. ნაშრომში ფორმულირებული სახით ეს ხსნის როგორც გლობალურ ბონეს პრობლემას, ისე Cohn-Vossen-Berger-ის ანალიზური უნიკალურობის კითხვას. შედეგი ზედაპირების კლასიკურ თეორიას არ აუქმებს; ის აჩვენებს, რომ შემცირებული მონაცემი — მეტრიკა პლუს საშუალო სიმრუდე — კომპაქტური ზედაპირის ერთმნიშვნელოვნად ამოსაცნობად ყოველთვის საკმარისი არაა.

## ზედმეტი ხმაურის გარეშე

**რას აჩვენებს ნაშრომი:** კომპაქტური გლუვი ბონეს წყვილები არსებობს. უფრო კონკრეტულად, ავტორები R3-ში აშკარად აგებენ ტორებს, რომლებსაც შესაბამის წერტილებში ერთი და იგივე მეტრიკა და საშუალო სიმრუდის ფუნქცია აქვს, მაგრამ

რომლებიც კონგრუენტული არ არის.

**რა არის დასაჯერებელი, მაგრამ არა მთავარი შედეგი:** გამოთვლითმა და დისკრეტულ-გეომეტრიულმა ძიებამ შეიძლება რთული გლუვი კონსტრუქციების პოვნაში მიმართულება მოგვცეს. ავტორები ამბობენ, რომ ეს გზა მნიშვნელოვანი იყო, მაგრამ შედეგი მტკიცებულებაზე დგას და არა რიცხვით სურათზე.

**რას არ აჩვენებს:** რომ ყველა ან უმეტეს ზედაპირს ასეთი ორაზროვნება აქვს. ზოგადი უნიკალურობის შედეგი კვლავ ძალაში რჩება; ეს გამონაკლისი, მაგრამ გადამწყვეტი კონტრმაგალითებია.

**მთავარი შეზღუდვა ფართო აუდიტორიისთვის:** მტკიცებულება ძლიერ ტექნიკურ დიფერენციალურ გეომეტრიაში ცხოვრობს — იზოთერმული ზედაპირები, ბონეს წყვილების კლასიფიკაცია, პერიოდულობის პირობები და ანალიზური კონსტრუქცია. თეორემის მნიშვნელობის გაგება შესაძლებელია ამ აპარატის ბოლომდე გავლევის გარეშე.

**რამდენად მაღალი უნდა იყოს ნდობა?** თეორემის ფორმულირების მიმართ — მაღალი, როგორც რეცენზირებული მათემატიკური შედეგის მიმართ. სიფრთხილე ინტერპრეტაციას ეხება და არა მტკიცებულებას: შედეგი უნდა წავიკითხოთ როგორც „ეს შემცირებული გეომეტრიული მონაცემი ფორმას ყოველთვის არ განსაზღვრავს“, და არა როგორც „გეომეტრიას ფორმების ამოცნობა არ შეუძლია“.

## წყაროები

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z
https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335
https://arxiv.org/abs/2110.06335