



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

같은 국소 기하를 공유하면서도 서로 다른 형태일 수 있는 두 토리

*Publications mathématiques de l'IHES*에 실린 한 구성은 최초의 콤팩트 *Bonnet* 쌍을 제시한다. 이는 삼차원 공간 속의 매끄러운 실해석적 토리 두 개로, 대응하는 점에서 동일한 고유 계량과 동일한 평균 곡률을 가지지만 강제 운동을 제외하면 같은 표면이 아니다. 이 결과는 표면 기하학의 오래된 유일성 문제를 해결하며, 충분한 국소 측정값이 콤팩트한 형태를 식별해야 한다는 그럴 듯한 생각에 대한 정확한 반례를 제시한다.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, *Publications mathématiques de l'IHES* · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

규명을 거부하는 형태

표면 밖으로 나갈 수 없는 상황에서 표면을 측정한다고 상상해 보자. 표면을 따라 이동할 때 한 점에서 다른 점까지 거리가 얼마나 되는지처럼, 표면 위에서 측정되는 거리를 잴 수 있다. 이것이 표면의 계량이다. 이제 외부에서 얻는 측정값을 하나 더해 보자. 각 점에서 표면이 평균적으로 얼마나 휘어 있는지, 즉 평균 곡률을 기록하는 것이다.

이는 매우 많은 정보처럼 들린다. 많은 표면에서는 실제로 충분하다. 고유 거리와 평균 곡률 함수를 알고 있다면, 삼차원 공간 속 형태가 정해질 것이라고 예상할 수 있다.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann, Andrew Sageman-Furnas 는 이제 그러한 예상을 무너뜨리는 콤팩트 표면을 구성했다. 이들의 논문은 등거리이고 대응하는 점에서 평균 곡률이 같지만 합동이 아닌 두 토리를 제시한다. 이 토리는 도넛 모양의 표면이지만, 평범한 둥근 도넛은 아니다. 한쪽을 회전, 평행이동 또는 반사해 다른 쪽과 겹치게 만들 수 없다. 이들은 공간 속에서 본질적으로 서로 다른 **몰입 (immersion)** 이다.

이 분야의 용어로는 콤팩트 Bonnet 쌍이라고 한다. 논문은 이들을 이러한 종류의 첫 사례라고 부른다.

문제의 내용

고전적 표면 이론은 두 종류의 정보를 구분한다.

계량은 표면 위에서 측정되는 거리를 알려 준다. 평평한 판을 원기둥으로 말아도 같은 고유 계량을 유지한다. 작은 개미가 거리만 측정하며 그 판 위를 걸어 다닌다면 판이 말려 있다는 사실을 알아차리지 못할 것이다. 완전한 두 번째 기본형은 표면이 공간 속에서 어떻게 휘어지는지에 대해 훨씬 더 많은 것을 알려 준다. 고전적인 Bonnet 정리는 계량과 완전한 굽힘 데이터가 적절한 양립 조건을 만족하면 몰입이 강제 운동을 제외하고 결정된다고 말한다.

그러나 1867 년 Pierre Ossian Bonnet 은 더 날카로운 질문을 던졌다. 굽힘 데이터를 줄이면 어떻게 될까? 계량이 이미 가우스 곡률을 고유하게 결정하므로, 계량과 평균 곡률 함수만으로 표면을 특정할 수 있을까?

대체로 답은 그렇다. 여기서 '대체로' 라는 말이 중요하다. 기하학에는 흔히 예외적인 경우가 있다. 즉, 통상적인 유일성 명제가 성립하지 않는 특수한 표면들이다. 열린 문제는 계량과 평균 곡률은 일치하지만 공간 속 형태가 서로 다른 콤팩트 매끄러운 표면이 존재하는지였다.

이것이 Global Bonnet Problem 이다. 새 논문은 토리를 통해 이 문제에 답한다.

저자들이 만든 것

저자들은 평균 곡률을 보존하는 등거리사상으로 연결된 매끄러운 토리 한 쌍을 구성한다. 이는 대응하는 점들이 그 주변에서 동일한 고유 거리를 가지며 평균 곡률 값도 같지만, 두 표면이 합동은 아니라는 뜻이다.

이 구성은 단순히 수치적으로 기이한 사례 하나를 만들어 내는 데 그치지 않는다. 토리는 실해석적이다. 즉, 거칠게 이어 붙인 물체가 아니라 멍급수로 표현할 수 있을 만큼 규칙적이다. 또한 저자들은 자신들의 사례가 일반적으로 어떤 **주변공간 등거리변환 (ambient isometry)** 으로도 서로 옮길 수 없음을 증명한다. 아울러 이 구성에는 함수 매개변수가 들어 있으므로 이러한 쌍이 비가산적으로 많다고 말한다.

경로는 기술적이다. Bonnet 쌍과 등온 (isothermic) 표면 사이의 관계를 이용하는데, 등온 표면은 특별한 곡률선 좌표를 갖는 표면의 한 부류다. 사례들은 한 곡률선족이 평면 곡선들로 이루어진 등온 토리에서 시작한 뒤, Bonnet 쌍을 만들어 내는 구성을 적용해 얻어진다. 저자들에 따르면 이 접근법은 토리의 5x7 사각형 분해를 사용한 계산 실험에서 발전했으며, 이산 미분기하가 매끄러운 결과로 향하는 길잡이 역할을 했다.

시각적 결과는 증명보다 이해하기 쉽다. 논문의 두 토리는 일치하는 기하학적 데이터를 가지지만 전역적인 배치는 눈에 띄게 다르다. 저자들의 Figure 1에서는 한 토리의 대응하는 큰 '거품' 들이 다른 토리에서 보다 서로 더 가까이 놓여 있다. 이 눈에 보이는 차이는 그림을 그리는 방식에서 생긴 속임수가 아니다. 정리는 선택된 국소 데이터가 일치하더라도 두 표면이 공간 속에서 같은 형태가 아니라고 말한다.

[figure_pair pending]

논문의 Figure 1은 Bonnet 쌍 토리의 수치적 사례를 보여 주며, 여기서는 한 쌍의 그림으로 제시한다. 두 패널은 같은 토리를 서로 다른 각도에서 본 것이 아니다. 이들은 쌍을 이루는 서로 다른 두 토리다. 회색 격자선은 대응하는 표면 좌표를 눈으로 따라가는데 도움을 주고, 색이 있는 곡선은 대응하는 곡률선 루프를 표시한다. 이 그림의 핵심은 전역적 불일치다. 정리에 따르면 두 표면은 대응하는 점에서 동일한 고유 계량과 동일한 평균 곡률을 갖지만, 큰 거품들은 눈에 띄게 서로 다른 위치에 놓여 있다.

이것이 모순이 아닌 이유

이 결과는 기하학이 자의적이라거나 측정이 쓸모없다고 말하지 않는다.

특정한 축약된 데이터 집합, 즉 계량과 평균 곡률만으로는 콤팩트 표면을 언제나 유일하게 식별할 수 없다는 뜻이다. 고전적인 완전한 유일성 정리는 더 풍부한 굽힘 정보를 사용한다. 평균 곡률은 두 주곡률의 평균일 뿐이다. 한 점에서 표면이 평균적으로 얼마나 휘어 있는지는 알려 주지만, 방향별 굽힘에 관한 모든 정보는 보존하지 않는다.

바로 그 구별이 핵심이다. 두 표면은 표면을 따라 측정되는 거리와 모든 대응하는 점에서의 평균 굽힘에 대해 일치하면서도, 그 굽힘이 공간 속에 배치되는 방식에서는 다를 수 있다.

이 논문은 또한 이러한 모호성이 일반적이라고 말하지 않는다. 서론은 신중하다. 일반적으로 계량과 평균 곡률은 표면을 결정한다. Bonnet 쌍은 예외적이다. 이들의 가치는 바로 유일성 문제가 해결되지 않은 채 남아 있던 콤팩트하고 매끄러우며 해석적인 설정에서 그 예외가 실제로 존재함을 보여 준다는 데 있다.

어떤 오래된 질문을 해결하는가

첫 번째로 해결된 질문은 Global Bonnet Problem 이다. 동일한 평균 곡률을 대응하는 점에서 가지며 등거리사상으로 연결되지만 합동이 아닌, 3 차원 유클리드 공간에 놓인 콤팩트하고 매끄러운 몰입 (immersion) 두 개가 존재하는가? 저자들의 답은 그렇다는 것이다.

두 번째는 Cohn-Vossen-Berger 문제다. 3 차원 유클리드 공간에서 주변공간 등거리변환으로 서로 옮길 수 없는 등거리 콤팩트 해석적 표면 두 개가 존재하는가? 같은 구성으로 얻은 해석적 토리를 사용하면, 다시 답은 그렇다.

해석적이라는 부분이 중요하다. 콤팩트 표면의 기존 비유일성 사례들은 더 낮은 정칙성이나 국소적 변형에 의존할 수 있었다. 이 토리들은 단순히 한 패치에서 혹은 바깥 붙인 매끄러운 물체가 아니다. 논문은 대응하는 근방들이 어디에서도 국소적으로 합동이 아니라고 강조한다. 차이는 이어 붙인 이음매에 숨겨진 것이 아니라 구성 전체에 퍼져 있다.

왜 중요한가

이는 순수수학이지만, 직관은 폭넓게 적용된다. 어떤 형태는 한 측면에서는 데이터가 지나치게 많아 보여도, 다른 측면에서는 여전히 충분히 식별되지 않을 수 있다. 중요한 것은 데이터의 양이 아니라 그 데이터가 올바른 종류의 정보를 포함하는지 여부다.

계량과 평균 곡률의 결합은 내부 거리와 외재적 굽힘 측정을 함께 제공하므로 강력해 보인다. 콤팩트 Bonnet 쌍은 그 간극을 보여 준다. 평균 굽힘은 완전한 굽힘이 아니다. 국소적 일치가 언제나 전역적 식별을 뜻하지는 않는다. 해석적 정칙성도 유일성을 보장하는 마법의 조건은 아니다.

이는 이 정리를 넘어서는 유용한 교훈이다. 기하학에서 역문제는 흔히 일련의 측정값이 그것을 만들어 낸 대상을 결정하는지 묻는다. 이 논문은 고전적인 한 표면 문제에 대해 날카로운 새 답을 제시한다. 대상이 콤팩트하고 매끄러우며 해석적일 때조차, 항상 그런 것은 아니다.

요약

Bobenko, Hoffmann, Sageman-Furnas 는 최초의 콤팩트 Bonnet 쌍을 구성했다. 즉, 등거리사상으로 연결되고 대응하는 점에서 동일한 평균 곡률을 가지지만 합동이 아닌 R^3 속 매끄러운 토리 두 개다. 이들의 사례는 실험해석적이며 일반적으로 어떤 주변공간 등거리변환으로도 서로 옮길 수 없다. 따라서 논문에서 제시한 Global Bonnet Problem 과 Cohn-Vossen-Berger 해석적 유일성 문제를 모두 해결한다. 이 결과는 고전적 표면 이론을 뒤집는 것이 아니라, 계량과 평균 곡률이라는 축약된 데이터만으로는 콤팩트 표면을 언제나 유일하게 식별하기에 충분하지 않음을 보여 준다.

과장 없이 보면

논문이 보여 주는 것: 콤팩트 매끄러운 Bonnet 쌍이 존재한다. 더 구체적으로 말하면, 저자들은 대응하는 점에서 동일한 계량과 평균 곡률 함수를 가지지만 합동은 아닌 R^3 속 토리를 명시적으로 구성한다.

그렇듯하지만 핵심은 아닌 것: 계산적·이산기하학적 탐색이 어려운 매끄러운 구성을 이끄는 데 도움이 될 수 있다는 점. 논문은 이 경로가 중요했다고 말하지만, 결과를 뒷받침하는 것은 수치적 그림이 아니라 증명이다.

논문이 보여 주지 않는 것: 모든 표면 또는 대부분의 표면이 모호하다는 것. 일반적 유일성 명제는 여전히 배경의 일부로 남아 있다. 이들은 예외적이지만 결정적인 반례다.

일반 독자가 알아야 할 주요 한계: 증명은 매우 기술적이며, 등온 표면, Bonnet 쌍 분류, 주기 조건, 해석적 구성 등 미분기하학의 내용을 다룬다. 독자는 그 수학적 장치를 따라가지 않고도 정리의 의미를 이해할 수 있다.

일반 독자는 어느 정도 확신해도 되는가? 동료 심사를 거친 수학적 결과로서 정리의 진술에 대해서는 높은 확신을 가져도 된다. 적절한 주의점은 증거가 아니라 해석에 관한 것이다. 이를 '이 축약된 기하학적 데이터가 형태를 언제나 결정하는 것은 아니다' 라고 읽어야지, '기하학은 형태를 식별할 수 없다' 라고 읽어서는 안 된다.

출처

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>