



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Twée tori kunnen dezelfde lokale meetkunde delen en toch verschillende vormen zijn

Een constructie in Publications mathématiques de l'IHES geeft de eerste compacte Bonnet-paren: twee gladde, reëel-analytische tori in de driedimensionale ruimte die dezelfde intrinsieke metriek en in corresponderende punten dezelfde gemiddelde kromming hebben, maar toch niet hetzelfde oppervlak zijn tot op een starre beweging na. Het resultaat sluit oude uniciteitsvragen in de oppervlakkenmeetkunde af, en het is een precies tegenvoorbeeld van een verleidelijk idee: dat voldoende lokale metingen een compacte vorm moeten identificeren.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

De vorm die zich niet laat identificeren

Stel je voor dat je een oppervlak opmeet zonder erbuiten te mogen stappen. Je kunt afstanden langs het oppervlak meten: hoe ver het ene punt van het andere ligt als je over het oppervlak zelf reist. Dat is de metriek van het oppervlak. Voeg nu nog één meting van buitenaf toe: noteer in elk punt de gemiddelde buiging van het oppervlak, zijn gemiddelde kromming.

Dat klinkt als veel informatie. Voor veel oppervlakken is het genoeg. Als je de intrinsieke afstanden en de functie van de gemiddelde kromming kent, zou je verwachten dat de vorm in de driedimensionale ruimte vastligt.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann en Andrew Sageman-Furnas hebben nu compacte oppervlakken geconstrueerd die die verwachting logenstraffen. Hun artikel geeft twee tori - donutvormige oppervlakken, zij het geen gewone ronde donuts - die isometrisch zijn en in corresponderende punten dezelfde gemiddelde kromming hebben, maar niet congruent zijn. Je kunt de ene niet door draaien, verschuiven of spiegelen in de andere overvoeren. Het zijn werkelijk verschillende immersies in de ruimte.

In de taal van het vakgebied zijn het compacte Bonnet-paren. Het artikel noemt ze de eerste voorbeelden van deze soort.

Wat het probleem is

De klassieke oppervlakkentheorie scheidt twee soorten informatie.

De metriek vertelt je de afstanden gemeten op het oppervlak. Een vlak vel dat tot een cilinder wordt opgerold, behoudt dezelfde intrinsieke metriek: een kleine mier die over het vel loopt, zou het oprollen niet opmerken door alleen afstanden te meten. De volledige tweede fundamenteelvorm vertelt veel meer over hoe het oppervlak in de ruimte buigt. De klassieke stelling van Bonnet zegt dat de immersie, wanneer de metriek en de volledige buigingsgegevens aan de juiste compatibiliteitsvergelijkingen voldoen, tot op een starre beweging na bepaald is.

Maar in 1867 stelde Pierre Ossian Bonnet een scherpere vraag. Wat als de buigingsgegevens worden gereduceerd? Aangezien de metriek de Gauss-kromming al intrinsiek bepaalt, kan een oppervlak dan worden gekarakteriseerd door de metriek plus de functie van de gemiddelde kromming?

Generiek is het antwoord ja. Dat woord doet ertoe. De meetkunde kent vaak uitzonderlijke gevallen: bijzondere oppervlakken waarvoor de gebruikelijke uniciteitsuitspraak faalt. De open vraag was of er compacte gladde voorbeelden bestonden waarin de metriek en de gemiddelde kromming overeenstemmen, maar de oppervlakken in de ruimte niet dezelfde zijn.

Dit is het Globale Bonnet-probleem. Het nieuwe artikel beantwoordt het met tori.

Wat de auteurs hebben gebouwd

De auteurs construeren een paar gladde tori in R^3 die verbonden zijn door een isometrie die de gemiddelde kromming behoudt. Dat betekent dat corresponderende punten dezelfde intrinsieke afstanden om zich heen en dezelfde waarde van de gemiddelde kromming hebben, maar dat de twee oppervlakken niet congruent zijn.

De constructie doet meer dan één numerieke curiositeit opleveren. De tori zijn reëel-analytisch - zo regulier als machtreeksmeetkunde, geen ruw opgelapte objecten - en de auteurs bewijzen dat hun voorbeelden generiek niet door enige isometrie van de omringende ruimte verbonden zijn. Ze stellen bovendien dat hun constructie overaftelbaar veel van zulke paren oplevert, omdat ze een functionele parameter bevat.

De route is technisch. Ze gebruikt de relatie tussen Bonnet-paren en isotherme oppervlakken, een klasse van oppervlakken met speciale krommingslijncoördinaten. De voorbeelden ontstaan door te vertrekken van isotherme tori met één familie van vlakke krommingslijnen en een constructie toe te passen die het Bonnet-paar voortbrengt. De auteurs zeggen dat de aanpak voortkwam uit computationele experimenten met een 5×7 -quad-decompositie van een torus, met discrete differentiaalmeetkunde als gids naar het gladde resultaat.

Het visuele resultaat is makkelijker te vatten dan het bewijs. De twee tori in het artikel hebben overeenstemmende meetkundige gegevens, maar een zichtbaar verschillende globale plaatsing: in Figuur 1 van de auteurs zitten corresponderende grote “bellen” op de ene torus dicht bij elkaar dan op de andere. Dat zichtbare verschil is geen tekentruc. De stelling zegt dat de oppervlakken in de ruimte niet dezelfde vorm hebben, ook al stemmen de geselecteerde lokale gegevens overeen.

[figure_pair pending]

Figuur 1 uit het artikel toont een numeriek voorbeeld van de Bonnet-paar-tori, hier weergegeven als een gepaarde figuur. De twee panelen zijn niet twee aanzichten van dezelfde torus: het zijn de twee verschillende tori van het paar. De grijze rasterlijnen helpen het oog corresponderende oppervlaktecoördinaten te volgen, terwijl de gekleurde krommen corresponderende lussen van krommingslijnen markeren. De kern van het beeld is de globale discrepantie: de grote bellen zitten op zichtbaar verschillende posities, ook al zegt de stelling dat de twee oppervlakken dezelfde intrinsieke metriek en in corresponderende punten dezelfde gemiddelde kromming hebben.

Waarom dit geen tegenspraak is

Het resultaat zegt niet dat meetkunde willekeurig is, of dat metingen nutteloos zijn.

Het zegt dat een bepaalde gereduceerde gegevensverzameling - metriek plus gemiddelde kromming - niet altijd volstaat om een compact oppervlak eenduidig te identificeren. De volledige klassieke uniciteitsstelling gebruikt rijkere buigingsinformatie. De gemiddelde kromming is slechts een gemiddelde van de twee hoofdkrommingen. Ze vertelt hoe sterk het oppervlak in een punt gemiddeld buigt,

maar bewaart niet alle richtingsafhankelijke buigingsinformatie.

Dat onderscheid is de kern van de zaak. Twee oppervlakken kunnen overeenstemmen in de afstanden langs het oppervlak en in de gemiddelde buiging in elk corresponderend punt, en toch verschillen in de manier waarop die buiging in de ruimte is geordend.

Het artikel zegt ook niet dat deze ambiguïteit typisch is. De inleiding is zorgvuldig: generiek bepaalt metriek plus gemiddelde kromming een oppervlak. Bonnet-paren zijn uitzonderlijk. Hun waarde is precies dat ze laten zien dat de uitzondering bestaat in de compacte, gladde, analytische setting waar de vraag onopgelost was gebleven.

Welke oude vragen het afsluit

De eerste afgesloten vraag is het Globale Bonnet-probleem: bestaan er twee niet-congruente compacte gladde immersies in de driedimensionale euclidische ruimte die verbonden zijn door een isometrie met dezelfde gemiddelde kromming in corresponderende punten? De auteurs antwoorden ja.

De tweede is het Cohn-Vossen-Berger-probleem: bestaan er twee isometrische compacte analytische oppervlakken in de euclidische driedimensionale ruimte die niet door een isometrie van de omringende ruimte verbonden zijn? Ook hier is het antwoord ja, met de analytische tori die door dezelfde constructie worden verkregen.

Het analytische deel is belangrijk. Eerdere niet-uniciteitsvoorbeelden voor compacte oppervlakken konden steunen op lagere regulariteit of lokale wijzigingen. Deze tori zijn niet zomaar een glad object waarin in één stuk een bult is verwisseld. Het artikel benadrukt dat de corresponderende omgevingen nergens lokaal congruent zijn: het verschil is over de hele constructie verspreid, niet verborgen in een reparatienaad.

Waarom het ertoe doet

Dit is zuivere wiskunde, maar de intuïtie is breed. Een vorm kan in één opzicht overgedetermineerd zijn en in een ander toch ondergeïdentificeerd. Wat telt is niet hoeveel gegevens je hebt, maar of de gegevens de juiste soort informatie bevatten.

Metriek plus gemiddelde kromming voelt sterk omdat ze interne afstanden combineert met een extrinsieke buigingsmaat. Het compacte Bonnet-paar toont het gat: gemiddelde buiging is niet volledige buiging. Lokale overeenstemming is niet altijd globale identificatie. Analytische regulariteit is geen magische uniciteitsgarantie.

Dat is een nuttige les die verder reikt dan deze stelling. In de meetkunde vragen inverse problemen vaak of een verzameling metingen het object bepaalt dat ze heeft voortgebracht. Dit artikel geeft een scherp nieuw antwoord op één klassiek oppervlakkenprobleem: niet altijd, zelfs niet wanneer het

object compact, glad en analytisch is.

Heldere samenvatting

Bobenko, Hoffmann en Sageman-Furnas construeren de eerste compacte Bonnet-paren: twee niet-congruente gladde tori in R^3 die door een isometrie verbonden zijn en in corresponderende punten dezelfde gemiddelde kromming hebben. Hun voorbeelden zijn reëel-analytisch en generiek niet door enige isometrie van de omringende ruimte verbonden, waarmee zowel het Globale Bonnet-probleem als de analytische uniciteitsvraag van Cohn-Vossen-Berger, zoals in het artikel geformuleerd, wordt opgelost. Het resultaat werpt de klassieke oppervlakkentheorie niet omver; het laat zien dat de gereduceerde gegevens van metriek plus gemiddelde kromming niet altijd volstaan om een compact oppervlak eenduidig te identificeren.

Zonder omwegen

Wat het artikel aantoont: Compacte gladde Bonnet-paren bestaan. Meer specifiek construeren de auteurs expliciet tori in R^3 met dezelfde metriek en dezelfde functie van de gemiddelde kromming in corresponderende punten, die echter niet congruent zijn.

Wat plausibel is maar niet het punt: Dat computationele en discreet-meetkundige verkenning moeilijke gladde constructies kan sturen. Het artikel zegt dat deze route belangrijk was, maar het resultaat rust op het bewijs, niet op het numerieke beeld.

Wat het niet aantoont: Dat alle of de meeste oppervlakken ambigu zijn. De generieke uniciteitsuitspraak blijft deel van de achtergrond. Dit zijn uitzonderlijke maar beslissende tegenvoorbeelden.

Belangrijkste beperkingen voor een algemene lezer: Het bewijs is zeer technisch en leeft in de differentiaalmeetkunde: isotherme oppervlakken, classificaties van Bonnet-paren, periodevoorwaarden en analytische constructie. Een lezer kan de betekenis van de stelling begrijpen zonder de machinerie te volgen.

Hoeveel vertrouwen mag een algemene lezer hebben? Hoog wat betreft de uitspraak van de stelling als een peer-reviewed wiskundig resultaat. De juiste voorzichtigheid is interpretatief, niet evidentieel: lees het als “deze gereduceerde meetkundige gegevens bepalen de vorm niet altijd”, niet als “meetkunde kan vormen niet identificeren.”

Bronnen

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>