The Clean Paper

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Tori lama geometry local tokko qabaatanii iyyuu boca adda adda ta'uu danda'u

Construction Publications mathematiques de l'IHES keessatti compact Bonnet pairs jalqabaa kenna: tori smooth, real-analytic lama iddoo sadii-dimenshinii keessatti metric keessaa fi mean curvature qabxii wal-fakkaatan irratti tokko qaban, garuu rigid motion tokko hanga ilaalamutti fuula tokko miti. Bu'aan kun gaaffilee uniqueness durii surface geometry keessatti cufa, akkasumas yaada nama hawwatu tokkoof counterexample sirrii dha: safartuun local baay'een boca compact tokko dirqamaan adda baasa jedhu.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

Boca addaan beekuun didu

Mee fuula tokko keessaa ba'uu osoo hin dandeenye safaruu yaadi. Fageenya fuula sana irra jiru safaruu dandeessa: fuula sana irra deemuun qabxii tokko irraa gara qabxii biraatti hammam fagaata? Kun **meetirikii** fuula sanaati. Amma safartuu alaa tokko dabaladhu: qabxii hunda irratti, fuulli sun giddu-galeessaan hammam akka qaxxaamuru, jechuun **giddugaleessa curvature** isaa, galmeessi.

Kun odeeffannoo baay'ee fakkaata. Fuulota hedduufis ni ga'a. Fageenya keessaa fi giddugaleessa-curvature function yoo beekne, boca isaa iddoo sadii-dimenshinii keessatti murteessuu ni dandeenya jechuun namaaf fakkaata.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann fi Andrew Sageman-Furnas amma fuulota compact ta'an kan yaada kana fashaleessan ijaaran. Barruu isaanii tori lama — fuulota bifa donutii qaban, garuu donutii geengoo idilee miti — kan **isometric** ta'an, qabxii wal-fakkaatan irratti giddugaleessa curvature tokko qaban, garuu **congruent** hin taane ni kenna. Tokko naanneessuun, siqsiisuun yookaan calaqqisiisuun gara isa biraatti jijjiiruu hin dandeessu. Isaan iddoo keessatti immersions dhugumaan adda addaati.

Afaan gosa qorannoo kanaatiin, isaan **compact Bonnet pairs** dha. barruun fakkeenyota compact akkasii jalqabaa akka ta'an ibsa.

Rakkoon maal ture

Fuula tiyoorii klassikii odeeffannoo gosa lama adda baasa.

Safartuu jechuun fageenya fuula irratti safaramu dha. Waraqaa diriiraa tokko gara cylinderitti maruun safartuu keessaa isaa hin jijjiiru: muurtii xinnaan waraqaa irra deemtu, fageenya qofa safaruun maramuu isaa hin hubattu. **Lammaffaa fundamental boca** guutuun ammoo fuulli iddoo keessatti akkamitti qaxxaamuru irratti odeeffannoo baay'ee dabalataa kenna. Bonnet theorem klassikii keessatti, safartuu fi odeeffannoon qaxxaamuraa guutuun equations compatibility sirrii yoo guutan, immersion sun rigid motion tokko qofa hanga hafu murtaa'a.

Garuu bara 1867 Pierre Ossian Bonnet gaaffii caalaatti qajeelaa gaafate. Odeeffannoo qaxxaamuraa yoo hir'isne hoo? Safartuu mataan isaa Gaussian curvature keessaa murteessa; kanaaf safartuu fi giddugaleessa-curvature function qofa fayyadamuun fuula tokko adda baafachuun ni danda'amaa?

Haala waliigalaatiin deebiin eeyyee dha. Jechi **waliigalaatiin** asitti murteessaa dha. Ji'oometirii keessatti yeroo baay'ee haalli addaa jira: fuulota muraasa irratti seerri uniqueness idilee hin hojjatu. Gaaffiin banaa ture, fuulota compact, smooth ta'an keessatti safartuu fi giddugaleessa curvature walqixa ta'anii, garuu iddoo keessatti fuulonni sun adda ta'an jiraachuu isaanii ture.

Kun **Waliigalaa Bonnet Rakkoo** dha. Barruu haaraan tori fayyadamuun deebii eeyyee kenna.

Barreessitoonni maal ijaaran

Barreessitoonni tori smooth lama R3 keessatti, isometry giddugaleessa curvature eeguun walitti hidhatan ijaaru. Kana jechuun qabxiileen wal-fakkaatan fageenya keessaa walqixa fi giddugaleessa-curvature gatii walqixa qabu, garuu fuulonni lamaan congruent miti.

Ijaarsi kun curiosity lakkoofsaa tokko qofa miti. Toriin kunneen **dhugaa analytic** dha — akkuma ji'oometirii power-series, wantoota gara ta'anii patch gochuun ijaaraman miti — fi barreessitoonni fakkeenyota isaanii haala waliigalaatiin ambient isometry kamiinuu walitti jijjiiruun akka hin danda'amne mirkaneessu. Parametrii function tokko waan qabuuf, pairs akkasii lakkoofsa hin qabne jechuunis uncountably hedduu akka argamanis ibsu.

Karaan ragaa isaa teknikaa dha. Inni walitti dhufeenya Bonnet pairs fi **isothermic fuulota**, jechuun fuulota curvature-line coordinates addaa qaban, fayyadama. Fakkeenyotni isothermic tori kan curvature sararoota isaanii keessaa maatiin tokko plane keessa jiru irraa jalqabu; achiis construction tokko Bonnet pair sana uuma. Barreessitoonni akka jedhanitti, yaadni kun yaaliiwwan computational kan torus tokko 5x7 quad decomposition irratti godhaman irraa guddachaa dhufe; discrete differential ji'oometirii bu'aa smooth kanaaf qajeelfama ta'e.

Bu'aa suuraa irraa hubachuun ragaa caalaa salphaa dha. Tori lamaan barruu keessatti geometric daataa walqixa qabu, garuu iddoo keessatti sirna isaanii waliigalaa ifatti adda. Fakkii 1 barreessitootaa keessatti, "bubbles" gurguddoon wal-fakkaatan torus tokko irratti walitti dhiyaatanii, isa biraa irratti fagaataa jiru. Kun mala suuraa miti. Theoremichi fuulonni lamaan iddoo keessatti boca tokko akka hin taane mirkaneessa, vaikka odeeffannoon naannoo keessaa filatame walqixa ta'e.

[figure_pair pending]

Fakkii 1 barruu keessaa fakkeenya lakkoofsaa Bonnet-pair tori akka suuraa lama walitti qabameetti agarsiisa. Panels lamaan ilaalcha lama torus tokkoo miti; tori lama adda adda kan pair sanaa dha. Sararoonni mesh halluu cirracha qaban fuula coordinates wal-fakkaatan hordofuuf gargaaru; qaxxaamuroota halluu qaban ammoo curvature-line loops wal-fakkaatan mallatteessu. Qabxiin suuraa kanaa mismatch waliigalaa dha: bubbles gurguddoon iddoo adda addaatti argamu, vaikka theoremichi tori lamaan safartuu keessaa fi giddugaleessa curvature qabxii wal-fakkaatan irratti tokko akka qaban jedhu.

Kun maaliif wal-faallaa miti

Bu'aan kun ji'oometirii fedhii qofaan jijjiirama, yookaan safartuun faayidaa hin qabu jechuu miti.

Inni jedhu daataa hir'ifame tokko — safartuu + giddugaleessa curvature — yeroo hunda fuula compact tokko addatti beekuuuf gahaa miti. Theorem uniqueness klassikii guutuun odeeffannoo qaxxaamuraa baay'ee bal'aa fayyadama. Mean curvature principal curvatures lamaanii giddu-galeessa qofa. Qabxii tokko irratti fuulli giddu-galeessaan hammam akka qaxxaamuru ni hima, garuu qaxxaamura kallattii hunda hin eegu.

Adda baasi kun guutummaa yaadichaa dha. Fuulonni lama fageenya fuula irratti fi giddugaleessa

bending qabxii wal-fakkaatan hunda irratti walqixa ta'uu danda'u; garuu qaxxaamurri sun iddoo keessatti akkamitti qindaa'e irratti adda ta'uu danda'u.

barruun ambiguity kun yeroo baay'ee argama jechuu illee hin jedhu. Seensa isaa keessatti of-eeggannoo qaba: haala waliigalaatiin safartuu + giddugaleessa curvature fuula tokko ni murteessa. Bonnet pairs exception dha. Gatiin isaanii exception kun setting compact, smooth fi analytic keessatti dhugumaan akka jiru agarsiisuu isaanii dha.

Gaaffilee durii kam cufa

Gaaffiin jalqabaa **Waliigalaa Bonnet Rakkoo** dha: immersions compact smooth lama kan congruent hin taane, Euclidean three-space keessatti isometry fi giddugaleessa curvature qabxii wal-fakkaatan irratti tokkoon walitti hidhatan ni jiru? Barreessitoonni eeyyee jedhu.

Gaaffiin lammaffaa **Cohn-Vossen-Berger rakkoo** dha: fuulota compact analytic lama Euclidean three-space keessatti isometric ta'an, garuu ambient isometry tokkoon walitti hin jijjiiramne ni jiru? Ammas deebiin eeyyee dha, tori analytic ijaarsa wal fakkaataa irraa argaman fayyadamuun.

Kutaan analytic kun murteessaa dha. Fakkeenyotni non-uniqueness duraan compact fuulota irratti regularity gadi-aanaa yookaan jijjiirama naannoo keessaa irratti hirkachuu danda'u turan. Toriin kun-neen wanta smooth tokko irratti bump tokko patch tokko keessatti bakka buusuu qofa miti. barruun naannoon wal-fakkaatan bakka kamittuu naannoo keessaa congruent akka hin taane cimsuun ibsa: garaagarummaan construction guutuu keessa faca'ee jira, seam suphaa tokko keessatti dhokate miti.

Maaliif barbaachisaa dha

Kun mathematics qulqulluu dha, garuu intuition isaa bal'aa dha. Boca tokko karaa tokkoon daataa baay'ee qabaachuu danda'a, garuu karaa biraatiin adda baafamuu dadhabuu danda'a. Wanti mur-teessu daataa hammam akka qabdu miti; daataa sun odeeffannoo gosa sirrii qabaachuu isaa dha.

Safartuu + giddugaleessa curvature cimaa fakkaata, sababni isaas fageenya keessaa fi safartuu qaxxaamuraa alaa walitti maku. Compact Bonnet pair ammoo qaawwa kana agarsiisa: **giddugaleessa bending guutuu bending miti**. Waliigalteen naannoo keessaa yeroo hunda identification waliigalaa miti. Regularity analytic illee guarantee uniqueness ajaa'ibaa miti.

Barumsi kun theorem kana qofa irra hin dhaabbatu. Ji'oometirii keessatti inverse rakkoowwan yeroo baay'ee safartuun tokko wanta safartuu sana uume addatti murteessuu danda'aa jedhu gaafatu. bar-ruun rakkoo klassikii fuula tokkoof deebii qajeelaa kenna: yeroo hunda miti, wanti sun compact, smooth fi analytic ta'us.

Cuunfaa gabaabaa

Bobenko, Hoffmann fi Sageman-Furnas compact Bonnet pairs jalqabaa ijaaru: tori smooth lama R3 keessatti congruent hin taane, isometry tokkoon walitti hidhatan fi qabxii wal-fakkaatan irratti giddugaleessa curvature tokko qaban. Fakkeenyotni isaanii dhugaa analytic dha; haala waliigalaatiin ambient isometry kamiinuu walitti hin jijjiiraman, Waliigalaa Bonnet Rakkoo fi gaaffii uniqueness analytic Cohn-Vossen-Berger barruu keessatti ibsame lamaan furu. Bu'aan kun fuula tiyoorii klassikii hin diigu; daataa hir'ifame safartuu + giddugaleessa curvature yeroo hunda fuula compact tokko addatti murteessuuf gahaa akka hin taane agarsiisa.

Sakatta'a ifaa

barruun maal agarsiisa: Compact smooth Bonnet pairs ni jiru. Addatti, barreessitoonni tori R3 keessatti safartuu fi giddugaleessa-curvature function qabxii wal-fakkaatan irratti tokko qaban, garuu congruent hin taane ifatti ijaaru.

Wanti amansiisaa ta'e garuu ijoo miti: Exploration computational fi discrete ji'oometirii construction smooth rakkisaa qajeelchuu danda'a. barruun karaa kun barbaachisaa akka ture jedhu, garuu bu'aan ragaa irratti hunda'a, suuraa lakkoofsaa irratti miti.

Wanti hin agarsiifne: Fuulonni hundi yookaan baay'een isaanii ambiguous dha jechuu miti. Waliigalaa uniqueness statement ammallee duubbee keessatti dhugaa dha. Isaan exception dha, garuu counterexample murteessaa dha.

Daangaa dubbisaa waliigalaatiif: Ragaa baay'ee teknikaa fi differential ji'oometirii keessa jira: isothermic fuulota, classification Bonnet pairs, period haalawwan fi construction analytic. Dubbisaan machinery hunda hordofuu malee hiika theorem hubachuu danda'a.

Dubbisaan waliigalaa hammam amanuu qaba? Theorem statement irratti amantaa guddaa, sababiin isaas bu'aa mathematics gamaaggama ogeessotaa keessa darbe dha. Of-eeggannoon sirrii hiika irratti: "daataa geometric hir'ifame kun yeroo hunda boca hin murteessu" jedhutti dubbisi; "ji'oometirii bifa adda baafachuu hin danda'u" jedhutti miti.

Maddoota

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z
https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335
https://arxiv.org/abs/2110.06335