



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Dois toros podem ter a mesma geometria local e ainda assim ser formas diferentes

Uma construção em Publications mathématiques de l'IHES apresenta os primeiros pares de Bonnet compactos: dois toros suaves e real-analíticos no espaço tridimensional que têm a mesma métrica intrínseca e a mesma curvatura média em pontos correspondentes, mas não são a mesma superfície a menos de um movimento rígido. O resultado fecha antigas perguntas de unicidade em geometria de superfícies e é um contraexemplo preciso a uma ideia tentadora: a de que medições locais suficientes devem identificar uma forma compacta.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

A forma que se recusa a ser identificada

Imagine medir uma superfície sem poder sair dela. Você mede distâncias sobre a própria superfície: quanto vai de um ponto a outro se o caminho fica sempre nela. Isso é a métrica. Agora acrescente uma medição feita de fora: em cada ponto, registre a curvatura média, isto é, o encurvamento médio da superfície.

Parece muita informação. Para muitas superfícies, é mesmo. Se você conhece as distâncias internas e a função de curvatura média, é natural esperar que a forma no espaço tridimensional fique determinada.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann e Andrew Sageman-Furnas construíram superfícies compactas que derrotam essa expectativa. O artigo dá dois toros — superfícies em forma de rosquinha, embora não rosquinhas redondas comuns — que são isométricos e têm a mesma curvatura média em pontos correspondentes, mas não são congruentes. Não dá para transformar um no outro por rotação, translação ou reflexão. São imersões genuinamente diferentes no espaço.

Na linguagem da área, eles são pares de Bonnet compactos. O artigo os chama de primeiros exemplos desse tipo.

Qual é o problema

A teoria clássica das superfícies separa dois tipos de informação.

A métrica diz quais distâncias são medidas sobre a superfície. Uma folha plana enrolada em cilindro conserva a mesma métrica intrínseca: uma formiga andando na folha não perceberia o enrolamento apenas medindo distâncias. A segunda forma fundamental completa diz muito mais sobre como a superfície se dobra no espaço. O teorema de Bonnet clássico diz que, com a métrica e todos os dados de curvatura satisfazendo as equações de compatibilidade corretas, a imersão fica determinada a menos de movimento rígido.

Mas, em 1867, Pierre Ossian Bonnet fez uma pergunta mais afiada. E se os dados de curvatura forem reduzidos? Como a métrica já determina a curvatura gaussiana intrinsecamente, uma superfície pode ser caracterizada pela métrica mais a função de curvatura média?

Genericamente, a resposta é sim. Essa palavra importa. A geometria costuma ter casos excepcionais: superfícies especiais em que a unicidade usual falha. A pergunta aberta era se existiam exemplos compactos e suaves nos quais a métrica e a curvatura média coincidissem, mas as superfícies não fossem a mesma no espaço.

Esse é o Problema Global de Bonnet. O novo artigo o responde com toros.

O que os autores construíram

Os autores constroem um par de toros suaves em $\mathbb{R}^3$ relacionados por uma isometria que preserva a curvatura média. Isso significa que pontos correspondentes têm as mesmas distâncias intrínsecas ao redor e o mesmo valor de curvatura média, mas as duas superfícies não são congruentes.

A construção faz mais do que produzir uma curiosidade numérica. Os toros são real-analíticos — tão regulares quanto uma geometria descrita por séries de potências, não objetos remendados de modo grosseiro — e os autores provam que, genericamente, seus exemplos não são relacionados por nenhuma isometria ambiente. Eles também afirmam que a construção gera uma quantidade não enumerável desses pares, porque contém um parâmetro funcional.

O caminho técnico passa pela relação entre pares de Bonnet e superfícies isotérmicas, uma classe de superfícies com coordenadas especiais de linhas de curvatura. Os exemplos surgem a partir de toros isotérmicos com uma família de linhas de curvatura planas e de uma construção que produz o par de Bonnet. Os autores dizem que a abordagem nasceu de experimentos computacionais com uma decomposição quadrilateral 5×7 de um toro, usando geometria diferencial discreta como guia para o resultado suave.

O resultado visual é mais fácil de entender que a prova. Os dois toros do artigo têm os mesmos dados geométricos selecionados, mas uma colocação global visivelmente diferente: na Figura 1 dos autores, grandes “bolhas” correspondentes ficam mais próximas em um toro do que no outro. Essa diferença visível não é truque de desenho. O teorema diz que as superfícies não são a mesma forma no espaço, ainda que os dados locais escolhidos coincidam.

[figure_pair pending]

A Figura 1 do artigo mostra um exemplo numérico dos toros de um par de Bonnet, aqui apresentado como figura pareada. Os dois painéis não são duas vistas do mesmo toro: são os dois toros diferentes do par. As linhas cinzas da malha ajudam o olho a seguir coordenadas correspondentes na superfície, enquanto as curvas coloridas marcam laços correspondentes de linhas de curvatura. O ponto da imagem é o desencontro global: as grandes bolhas ficam em posições visivelmente diferentes, embora o teorema diga que os dois toros têm a mesma métrica intrínseca e a mesma curvatura média em pontos correspondentes.

Por que isso não é uma contradição

O resultado não diz que a geometria é arbitrária, nem que medições são inúteis.

Ele diz que um conjunto reduzido específico de dados — métrica mais curvatura média — nem sempre basta para identificar de modo único uma superfície compacta. O teorema clássico completo de unicidade usa informação de curvatura mais rica. A curvatura média é apenas uma média das duas curvaturas principais. Ela diz quanto a superfície se dobra, em média, num ponto, mas não preserva toda a informação direcional desse dobramento.

Essa distinção é o ponto inteiro. Duas superfícies podem concordar nas distâncias sobre a superfície

e no dobramento médio em cada ponto correspondente, mas diferir no modo como esse dobramento está organizado no espaço.

O artigo também não diz que essa ambiguidade é típica. A introdução é cuidadosa: genericamente, métrica mais curvatura média determina uma superfície. Pares de Bonnet são excepcionais. Seu valor está exatamente em mostrar que a exceção existe no cenário compacto, suave e analítico em que a pergunta ainda estava aberta.

Que perguntas antigas ele fecha

A primeira pergunta fechada é o Problema Global de Bonnet: existem duas imersões compactas suaves e não congruentes no espaço euclidiano tridimensional relacionadas por uma isometria e com a mesma curvatura média em pontos correspondentes? Os autores respondem que sim.

A segunda é o problema de Cohn-Vossen-Berger: existem duas superfícies analíticas compactas e isométricas no espaço euclidiano tridimensional que não são relacionadas por uma isometria ambiente? De novo, a resposta é sim, usando os toros analíticos obtidos pela mesma construção.

A parte analítica é importante. Exemplos anteriores de não unicidade para superfícies compactas podiam depender de menor regularidade ou de alterações locais. Esses toros não são apenas um objeto suave com uma saliência trocada em um remendo. O artigo enfatiza que vizinhanças correspondentes não são localmente congruentes em nenhum ponto: a diferença está espalhada pela construção, não escondida numa costura.

Por que importa

Isto é matemática pura, mas a intuição é ampla. Uma forma pode estar sobredeterminada em um sentido e ainda subidentificada em outro. O que conta não é só a quantidade de dados, mas se esses dados contêm o tipo certo de informação.

Métrica mais curvatura média parece forte porque combina distâncias internas com uma medida extrínseca de curvatura. O par de Bonnet compacto mostra a lacuna: curvatura média não é curvatura completa. Concordância local nem sempre é identificação global. Regularidade analítica não é uma garantia mágica de unicidade.

Essa é uma lição útil além deste teorema. Em geometria, problemas inversos costumam perguntar se um conjunto de medições determina o objeto que as produziu. Este artigo dá uma nova resposta precisa para um problema clássico de superfícies: nem sempre, mesmo quando o objeto é compacto, suave e analítico.

Em resumo

Bobenko, Hoffmann e Sageman-Furnas constroem os primeiros pares de Bonnet compactos: dois toros suaves e não congruentes em $\mathbb{R}^3$ que são relacionados por uma isometria e têm a mesma curvatura média em pontos correspondentes. Os exemplos são real-analíticos e, genericamente, não são relacionados por nenhuma isometria ambiente, resolvendo tanto o Problema Global de Bonnet quanto a questão analítica de unicidade de Cohn-Vossen-Berger como formuladas no artigo. O resultado não derruba a teoria clássica das superfícies; mostra que o dado reduzido de métrica mais curvatura média nem sempre basta para identificar uma superfície compacta de modo único.

Leitura crítica

O que o artigo mostra: Pares de Bonnet compactos e suaves existem. Mais especificamente, os autores constroem explicitamente toros em $\mathbb{R}^3$ com a mesma métrica e a mesma função de curvatura média em pontos correspondentes, mas que não são congruentes.

O que é plausível, mas não é o ponto: Que a exploração computacional e a geometria discreta possam guiar construções suaves difíceis. O artigo diz que esse caminho foi importante, mas o resultado repousa na prova, não na imagem numérica.

O que ele não mostra: Que todas ou a maioria das superfícies são ambíguas. A declaração genérica de unicidade continua fazendo parte do pano de fundo. Estes são contraexemplos excepcionais, mas decisivos.

Principais limitações para um leitor geral: A prova é altamente técnica e vive em geometria diferencial: superfícies isotérmicas, classificações de pares de Bonnet, condições de período e construção analítica. Um leitor pode entender o significado do teorema sem acompanhar a maquinaria.

Quanta confiança um leitor geral deve ter? Alta na declaração do teorema como resultado matemático revisado por pares. A cautela correta é interpretativa, não evidencial: leia como “esses dados geométricos reduzidos nem sempre determinam a forma”, não como “a geometria não consegue identificar formas”.

Fontes

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>