The Clean Paper

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Dois toros podem partilhar a mesma geometria local e ainda assim ter formas diferentes

Uma construção publicada na Publications mathématiques de l'IHÉS apresenta os primeiros pares de Bonnet compactos: dois toros suaves e analíticos reais no espaço tridimensional que têm a mesma métrica intrínseca e a mesma curvatura média em pontos correspondentes, mas não são a mesma superfície a menos de um movimento rígido. O resultado fecha antigas questões de unicidade na geometria de superfícies e fornece um contraexemplo preciso a uma ideia tentadora: a de que dados locais suficientes têm necessariamente de identificar uma forma compacta.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

A forma que se recusa a ser identificada

Imagine medir uma superfície sem lhe ser permitido sair dela. Pode medir distâncias ao longo da própria superfície: quão longe está um ponto de outro se viajar sobre ela. Essa é a métrica da superfície. Acrescente agora uma medida vista de fora: em cada ponto, registe a curvatura média da superfície.

Parece muita informação. Para muitas superfícies, é suficiente. Se conhecermos as distâncias intrínsecas e a função de curvatura média, seria natural esperar que a forma no espaço tridimensional ficasse determinada.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann e Andrew Sageman-Furnas construíram agora superfícies compactas que derrotam essa expectativa. O artigo apresenta dois toros — superfícies em forma de donut, embora não sejam donuts redondos comuns — que são isométricos e têm a mesma curvatura média em pontos correspondentes, mas não são congruentes. Não é possível rodar, transladar ou refletir um para obter o outro. São imersões genuinamente diferentes no espaço.

Na linguagem da área, são pares de Bonnet compactos. O artigo apresenta-os como os primeiros exemplos deste tipo.

Qual é o problema

A teoria clássica de superfícies separa dois tipos de informação.

A métrica diz-nos as distâncias medidas sobre a superfície. Uma folha plana enrolada num cilindro mantém a mesma métrica intrínseca: uma pequena formiga a caminhar sobre a folha não detetaria o enrolamento apenas medindo distâncias. A segunda forma fundamental completa diz muito mais sobre como a superfície se curva no espaço. O teorema de Bonnet clássico afirma que, conhecendo a métrica e toda a informação de curvatura que satisfaça as equações de compatibilidade corretas, a imersão fica determinada a menos de um movimento rígido.

Mas, em 1867, Pierre Ossian Bonnet fez uma pergunta mais incisiva. E se reduzirmos a informação de curvatura? Como a métrica já determina intrinsecamente a curvatura gaussiana, será uma superfície caracterizada pela métrica mais a função de curvatura média?

Genericamente, a resposta é sim. Essa palavra importa. A geometria tem frequentemente casos excecionais: superfícies especiais em que a habitual afirmação de unicidade falha. A questão em aberto era se existiam exemplos compactos e suaves em que a métrica e a curvatura média coincidiam, mas as superfícies não eram a mesma no espaço.

Este é o Problema Global de Bonnet. O novo artigo responde-lhe com toros.

O que construíram os autores

Os autores constroem um par de toros suaves em R3 relacionados por uma isometria que preserva a curvatura média. Isso significa que pontos correspondentes têm as mesmas distâncias intrínsecas em torno de si e o mesmo valor de curvatura média, mas as duas superfícies não são congruentes.

A construção faz mais do que produzir uma curiosidade numérica isolada. Os toros são analíticos reais — tão regulares quanto a geometria descrita por séries de potências, e não objetos remendados — e os autores demonstram que, genericamente, os seus exemplos não estão relacionados por qualquer isometria do espaço ambiente. Afirmam também que a construção produz incontavelmente muitos desses pares, porque contém um parâmetro funcional.

O caminho é técnico. Usa a relação entre pares de Bonnet e superfícies isotérmicas, uma classe de superfícies com coordenadas especiais de linhas de curvatura. Os exemplos surgem a partir de toros isotérmicos com uma família de linhas de curvatura planares e da aplicação de uma construção que produz o par de Bonnet. Os autores dizem que a abordagem cresceu a partir de experiências computacionais com uma decomposição quadrilateral 5×7 de um toro, usando geometria diferencial discreta como guia para chegar ao resultado suave.

O resultado visual é mais fácil de compreender do que a prova. Os dois toros do artigo têm dados geométricos correspondentes, mas uma disposição global visivelmente diferente: na Figura 1 dos autores, grandes «bolhas» correspondentes ficam mais próximas num toro do que no outro. Essa diferença visível não é um truque do desenho. O teorema diz que as superfícies não têm a mesma forma no espaço, apesar de os dados locais selecionados coincidirem.

[figure_pair pending]

A Figura 1 do artigo mostra um exemplo numérico dos toros de um par de Bonnet, aqui apresentado como figura dupla. Os dois painéis não são duas vistas do mesmo toro: são os dois toros diferentes do par. As linhas de malha cinzentas ajudam a acompanhar coordenadas correspondentes na superfície, enquanto as curvas coloridas marcam ciclos correspondentes de linhas de curvatura. O objetivo da imagem é mostrar a diferença global: as grandes bolhas aparecem em posições visivelmente diferentes, embora o teorema diga que as duas superfícies têm a mesma métrica intrínseca e a mesma curvatura média nos pontos correspondentes.

Porque isto não é uma contradição

O resultado não diz que a geometria é arbitrária nem que as medições sejam inúteis.

Diz que um determinado conjunto reduzido de dados — métrica mais curvatura média — nem sempre basta para identificar univocamente uma superfície compacta. O teorema clássico de unicidade completo usa informação de curvatura mais rica. A curvatura média é apenas a média das duas curvaturas principais. Diz quanto a superfície se curva, em média, num ponto, mas não preserva toda a informação direcional sobre a curvatura.

Essa distinção é precisamente o ponto. Duas superfícies podem concordar nas distâncias ao longo

da superfície e na curvatura média em cada ponto correspondente, mas diferir na forma como essa curvatura se organiza no espaço.

O artigo também não diz que esta ambiguidade seja típica. A introdução é cuidadosa: genericamente, a métrica mais a curvatura média determinam uma superfície. Os pares de Bonnet são excecionais. O seu valor está precisamente em mostrar que a exceção existe no contexto compacto, suave e analítico em que a questão permanecia por resolver.

Que velhas questões fecha

A primeira questão encerrada é o Problema Global de Bonnet: existem duas imersões compactas suaves e não congruentes no espaço euclidiano tridimensional relacionadas por uma isometria e com a mesma curvatura média nos pontos correspondentes? Os autores respondem que sim.

A segunda é o problema de Cohn-Vossen-Berger: existem duas superfícies analíticas compactas e isométricas no espaço euclidiano tridimensional que não estejam relacionadas por uma isometria do espaço ambiente? Mais uma vez, a resposta é sim, usando os toros analíticos obtidos pela mesma construção.

A parte analítica é importante. Exemplos anteriores de não unicidade para superfícies compactas podiam depender de menor regularidade ou de alterações locais. Estes toros não são simplesmente um objeto suave com uma protuberância trocada numa pequena região. O artigo salienta que vizinhanças correspondentes não são localmente congruentes em nenhum ponto: a diferença está espalhada pela construção, não escondida numa costura de reparação.

Porque importa

É matemática pura, mas a intuição é ampla. Uma forma pode ser sobredeterminada num sentido e continuar subidentificada noutro. O que conta não é quanta informação temos, mas se essa informação contém o tipo certo de dados.

Métrica mais curvatura média parecem fortes porque combinam distâncias internas com uma medida extrínseca de curvatura. O par de Bonnet compacto mostra a lacuna: curvatura média não é curvatura completa. Concordância local nem sempre implica identificação global. Regularidade analítica não é uma garantia mágica de unicidade.

É uma lição útil para além deste teorema. Em geometria, os problemas inversos perguntam frequentemente se um conjunto de medições determina o objeto que as produziu. Este artigo dá uma resposta nova e precisa para um problema clássico de superfícies: nem sempre, mesmo quando o objeto é compacto, suave e analítico.

Resumo claro

Bobenko, Hoffmann e Sageman-Furnas constroem os primeiros pares de Bonnet compactos: dois toros suaves em R3, não congruentes, relacionados por uma isometria e com a mesma curvatura média nos pontos correspondentes. Os seus exemplos são analíticos reais e, genericamente, não estão relacionados por qualquer isometria do espaço ambiente, resolvendo tanto o Problema Global de Bonnet como a questão de unicidade analítica de Cohn-Vossen-Berger tal como formulada no artigo. O resultado não derruba a teoria clássica de superfícies; mostra que os dados reduzidos de métrica mais curvatura média nem sempre são suficientes para identificar univocamente uma superfície compacta.

Verificação sem exageros

O que o artigo mostra: Existem pares de Bonnet compactos e suaves. Mais concretamente, os autores constroem explicitamente toros em R3 com a mesma métrica e função de curvatura média em pontos correspondentes, mas que não são congruentes.

O que é plausível, mas não é o ponto principal: Que exploração computacional e geometria discreta possam orientar construções suaves difíceis. O artigo diz que este caminho foi importante, mas o resultado assenta na prova, não na imagem numérica.

O que não mostra: Que todas ou a maioria das superfícies sejam ambíguas. A afirmação genérica de unicidade continua a fazer parte do enquadramento. Estes são contraexemplos excecionais, mas decisivos.

Principais limitações para um leitor geral: A prova é altamente técnica e pertence à geometria diferencial: superfícies isotérmicas, classificações de pares de Bonnet, condições de período e construção analítica. É possível compreender o significado do teorema sem acompanhar toda a maquinaria.

Quanta confiança deve ter um leitor geral? Elevada na formulação do teorema enquanto resultado matemático revisto por pares. A cautela correta é interpretativa, não probatória: leia-se como «estes dados geométricos reduzidos nem sempre determinam a forma», não como «a geometria não consegue identificar formas».

Fontes

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z
https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335
https://arxiv.org/abs/2110.06335