



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Dva torusy môžu mať rovnakú lokálnu geometriu, a predsa byť odlišnými tvarmi

Konštrukcia v Publications mathématiques de l'IHÉS prináša prvé kompaktné Bonnetove dvojice: dva hladké, reálne analytické torusy v trojrozmernom priestore, ktoré majú rovnakú vnútornú metriku a rovnakú strednú krivosť v zodpovedajúcich bodoch, no nie sú tým istým povrchom až na tuhý pohyb. Výsledok uzatvára staré otázky jednoznačnosti v geometrii povrchov a je presným protipríkladom lákavej predstavy, že dostatok lokálnych meraní musí kompaktný tvar určiť.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

Tvar, ktorý sa nedá jednoznačne určiť

Predstavte si, že meriate povrch, no nesmiete z neho vystúpiť. Môžete merať vzdialenosti pozdĺž neho: ako ďaleko je jeden bod od druhého, ak sa pohybuje po samotnom povrchu. To je jeho metrika. Teraz pridajme ešte jedno meranie zvonka: v každom bode zaznamenajme priemerné ohnutie povrchu, jeho strednú krivosť.

Zdá sa, že je to veľa informácií. Pri mnohých povrchoch naozaj stačia. Ak poznáte vnútorné vzdialenosti a funkciu strednej krivosti, mohli by ste očakávať, že tvar v trojrozmernom priestore bude jednoznačne určený.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann a Andrew Sageman-Furnas však skonštruovali kompaktné povrchy, ktoré tomuto očakávaniu odporujú. Ich práca predstavuje dva torusy — povrchy v tvare prstenca, hoci nie obyčajné okrúhle prstence — ktoré sú izometrické a majú v zodpovedajúcich bodoch rovnakú strednú krivosť, no nie sú zhodné. Jeden nemožno previesť na druhý otočením, posunutím ani zrkadlením. Sú to skutočne odlišné vnorenia do priestoru.

V jazyku odboru tvoria kompaktnú Bonnetovu dvojicu. Práca ich označuje za prvé takéto príklady.

V čom spočíva problém

Klasická teória povrchov rozlišuje dva druhy informácií.

Metrika opisuje vzdialenosti merané na povrchu. Plochý list zvinutý do valca si zachováva rovnakú vnútornú metriku: malý mravec, ktorý po ňom chodí, by zvinutie iba meraním vzdialeností nezistil. Úplná druhá fundamentálna forma hovorí oveľa viac o tom, ako sa povrch ohýba v priestore. Klasická Bonnetova veta tvrdí, že ak metrika a úplné údaje o ohybe spĺňajú príslušné rovnice kompatibility, vnorenie je určené až na tuhý pohyb.

Pierre Ossian Bonnet však v roku 1867 položil ostrejšiu otázku. Čo ak sa údaje o ohybe obmedzia? Keďže metrika už vnútorne určuje Gaussovu krivosť, možno povrch charakterizovať metrikou spolu s funkciou strednej krivosti?

Vo všeobecnosti je odpoveď áno. Slová „vo všeobecnosti“ sú dôležité. Geometria často pozná výnimočné prípady: osobitné povrchy, pri ktorých bežné tvrdenie o jednoznačnosti zlyháva. Otvorenou otázkou bolo, či existujú kompaktné hladké príklady, pri ktorých sa metrika aj stredná krivosť zhodujú, ale povrchy v priestore rovnaké nie sú.

To je globálny Bonnetov problém. Nová práca ho rieši pomocou torusov.

Čo autori skonštruovali

Autori konštruujú dvojicu hladkých torusov v R^3 spojených izometriou zachovávajúcou strednú krivosť. Zodpovedajúce body teda majú vo svojom okolí rovnaké vnútorné vzdialenosti a rovnakú hodnotu strednej krivosti, ale oba povrchy nie sú zhodné.

Konštrukcia nie je iba jedinou numerickou kuriozitou. Torusy sú reálne analytické — majú pravidelnosť geometrie opísateľnej mocninovými radmi, nejde o hrubo pospájané objekty — a autori dokazujú, že ich príklady vo všeobecnosti nespája nijaká izometria okolitého priestoru. Uvádzajú tiež, že konštrukcia poskytuje nespočítateľne veľa takýchto dvojíc, pretože obsahuje funkčný parameter.

Postup je technický. Využíva vzťah medzi Bonnetovými dvojicami a izotermickými povrchmi, triedou povrchov so špeciálnymi súradnicami tvorenými čiarami krivosti. Príklady vznikajú z izotermických torusov, ktorých jedna rodina čiar krivosti je rovinná, a následným použitím konštrukcie vytvárajúcej Bonnetovu dvojicu. Autori píšú, že prístup vyrástol z výpočtových experimentov s rozkladom torusu na štvoruholníky v usporiadaní 5×7 , pričom diskretná diferenciálna geometria poslúžila ako vodidlo k hladkému výsledku.

Vizuálny výsledok sa chápe ľahšie než dôkaz. Dva torusy v práci majú zhodné geometrické údaje, no viditeľne odlišné globálne usporiadanie: na obrázku 1 autorov ležia zodpovedajúce veľké „bubliny“ na jednom toruse bližšie pri sebe než na druhom. Tento viditeľný rozdiel nie je kresliarsky trik. Veta hovorí, že povrchy nemajú v priestore rovnaký tvar, hoci sa vybrané lokálne údaje zhodujú.

[figure_pair pending]

Obrázok 1 z práce ukazuje numerický príklad torusov tvoriacich Bonnetovu dvojicu, tu ako spárovanú ilustráciu. Panely nie sú dva pohľady na ten istý torus: zobrazujú dva rôzne torusy danej dvojice. Sivé čiary siete pomáhajú sledovať zodpovedajúce povrchové súradnice, zatiaľ čo farebné krivky označujú zodpovedajúce uzavreté čiary krivosti. Zmyslom obrázka je globálny nesúlad: veľké bubliny sa nachádzajú vo viditeľne odlišných polohách, hoci podľa vety majú oba povrchy rovnakú vnútornú metriku a rovnakú strednú krivosť v zodpovedajúcich bodoch.

Prečo to nie je rozpor

Výsledok nehovorí, že geometria je ľubovoľná alebo že merania sú zbytočné.

Hovorí, že konkrétny obmedzený súbor údajov — metrika spolu so strednou krivosťou — nemusí vždy stačiť na jednoznačné určenie kompaktného povrchu. Úplná klasická veta o jednoznačnosti používa bohatšie informácie o ohybe. Stredná krivosť je iba prímerom dvoch hlavných krivostí. Udáva, ako veľmi sa povrch v danom bode priemerne ohýba, ale nezachováva všetky informácie o ohybe v jednotlivých smeroch.

Práve toto rozlíšenie je podstatou výsledku. Dva povrchy sa môžu zhodovať vo vzdialenostiach pozdĺž povrchu aj v priemernom ohybe v každom zodpovedajúcom bode, no pritom sa líšiť spôsobom, akým je ohyb usporiadaný v priestore.

Práca tiež netvrdí, že je táto nejednoznačnosť typická. Úvod je opatrný: vo všeobecnosti metrika spolu so strednou krivosťou povrch určuje. Bonnetove dvojice sú výnimočné. Ich hodnota spočíva práve v tom, že dokazujú existenciu výnimky aj v kompaktnom, hladkom a analytickom prostredí, kde otázka zostávala nevyriešená.

Ktoré staré otázky výsledok uzatvára

Prvou uzavretou otázkou je globálny Bonnetov problém: existujú dve nezhodné kompaktné hladké vnorenia v trojrozmernom euklidovskom priestore, spojené izometriou a s rovnakou strednou krivosťou v zodpovedajúcich bodoch? Autori odpovedajú áno.

Druhou je Cohnov-Vossenov-Bergerov problém: existujú v euklidovskom trojrozmernom priestore dva izometrické kompaktné analytické povrchy, ktoré nespája izometria okolitého priestoru? Aj tu je odpoveď áno, vďaka analytickým torusom získaným tou istou konštrukciou.

Analytická časť je dôležitá. Skoršie príklady nejednoznačnosti kompaktných povrchov mohli využívať nižšiu regularitu alebo lokálne úpravy. Tieto torusy nie sú iba hladké objekty, pri ktorých sa na jednom mieste vymenila vydutina. Práca zdôrazňuje, že zodpovedajúce okolia nie sú nikde lokálne zhodné: rozdiel preniká celou konštrukciou a neskrýva sa v mieste spojenia.

Prečo na tom záleží

Ide o čistú matematiku, no jej intuícia je široká. Tvar môže byť v jednom zmysle preurčený a v inom stále nedostatočne určený. Rozhodujúce nie je množstvo údajov, ale to, či obsahujú správny druh informácie.

Metrika spolu so strednou krivosťou pôsobí ako silná kombinácia, pretože spája vnútorné vzdialenosti s vonkajšou mierou ohybu. Kompaktná Bonnetova dvojica ukazuje medzeru: priemerný ohyb nie je úplný ohyb. Lokálna zhoda nemusí vždy znamenať globálnu totožnosť. Analytická regularita nie je zázračnou zárukou jednoznačnosti.

Je to užitočné ponaučenie aj mimo tejto vety. Inverzné problémy v geometrii sa často pýtajú, či súbor meraní určuje objekt, ktorý ich vytvoril. Táto práca dáva pre jeden klasický problém teórie povrchov ostrú novú odpoveď: nie vždy, aj keď je objekt kompaktný, hladký a analytický.

Stručné zhrnutie

Bobenko, Hoffmann a Sageman-Furnas skonštruovali prvé kompaktné Bonnetove dvojice: dva nezhodné hladké torusy v $\mathbb{R}^3$, ktoré sú spojené izometriou a majú v zodpovedajúcich bodoch rovnakú strednú krivosť. Ich príklady sú reálne analytické a vo všeobecnosti ich nespája nijaká

izometria okolitého priestoru, čím podľa formulácie práce riešia globálny Bonnetov problém aj analytickú otázku jednoznačnosti Cohna-Vossena-Bergera. Výsledok nevyvracia klasickú teóriu povrchov; ukazuje, že obmedzené údaje tvorené metrikou a strednou krivosťou nemusia vždy stačiť na jednoznačné určenie kompaktného povrchu.

Kontrola bez príkras

Čo práca ukazuje: Kompaktné hladké Bonnetove dvojice existujú. Konkrétne autori explicitne konštruujú torusy v R^3 s rovnakou metrikou a funkciou strednej krivosti v zodpovedajúcich bodoch, ktoré však nie sú zhodné.

Čo je možné, ale nie je podstatou výsledku: Výpočtové a diskrétno-geometrické skúmanie môže viesť k náročným hladkým konštrukciám. Práca uvádza, že tento postup bol dôležitý, výsledok však stojí na dôkaze, nie na numerickom obrázku.

Čo práca neukazuje: Že sú nejednoznačné všetky alebo väčšina povrchov. Všeobecné tvrdenie o jednoznačnosti zostáva súčasťou východiska. Ide o výnimočné, ale rozhodujúce protipríklady.

Hlavné obmedzenia pre bežného čitateľa: Dôkaz je veľmi technický a patrí do diferenciálnej geometrie: pracuje s izotermickými povrchmi, klasifikáciou Bonnetových dvojíc, periodickými podmienkami a analytickou konštrukciou. Význam vety možno pochopiť bez sledovania celého aparátu.

Akú veľkú dôveru by mal mať bežný čitateľ? Vysokú v znenie vety ako recenzovaného matematického výsledku. Opatrnosť sa týka výkladu, nie dôkaznej sily: čítajte ho ako „tieto obmedzené geometrické údaje nemusia vždy určiť tvar“, nie ako „geometria nedokáže určovať tvary“.

Zdroje

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>