The Clean Paper

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

# Dva torusa imata lahko enako lokalno geometrijo in sta kljub temu različnih oblik

*Konstrukcija v reviji Publications mathématiques de l'IHÉS daje prve kompaktne Bonnetove pare: dva gladka realno-analitična torusa v tridimenzionalnem prostoru z enako intrinzično metriko in enako srednjo ukrivljenostjo v pripadajočih točkah, ki pa nista ista ploskev do togega gibanja. Rezultat zapira stara vprašanja o enoličnosti v geometriji ploskev in je natančen protiprimer privlačni zamisli, da mora dovolj lokalnih meritev enolično določiti kompaktno obliko.*

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES · DOI: 10.1007/s10240-025-00159-z

# Oblika, ki se noče enolično razkriti

Predstavljajte si, da merite ploskev, ne da bi smeli stopiti iz nje. Merite lahko razdalje po njej: kako daleč sta dve točki, če potujete po sami ploskvi. To je njena metrika. Nato dodajte še eno meritev od zunaj: v vsaki točki zabeležite povprečno upognjenost ploskve, njeno srednjo ukrivljenost.

To se zdi ogromno informacij. Pri številnih ploskvah jih je dovolj. Če poznate intrinzične razdalje in funkcijo srednje ukrivljenosti, bi lahko pričakovali, da je oblika v tridimenzionalnem prostoru s tem določena.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann in Andrew Sageman-Furnas so zdaj skonstruirali kompaktne ploskve, ki to pričakovanje izigrajo. Njihov članek poda dva torusa — površini v obliki krofa, čeprav ne običajna okrogla krofa — ki sta izometrična in imata v pripadajočih točkah enako srednjo ukrivljenost, vendar nista kongruentna. Enega ni mogoče z vrtenjem, premikom ali zrcaljenjem preslikati v drugega. Gre za resnično različni vložitvi v prostor.

V jeziku področja sta to kompaktni Bonnetovi par. Avtorji ju opisujejo kot prva taka primera.

# V čem je problem

Klasična teorija ploskev ločuje dve vrsti podatkov.

Metrika pove razdalje, izmerjene po ploskvi. Ravna plošča, zvita v valj, ohrani isto intrinzično metriko: majhna mravlja, ki hodi po plošči, zgolj iz meritev razdalj ne bi opazila zvijanja. Polna druga fundamentalna forma pove precej več o tem, kako se ploskev upogiba v prostoru. Klasični Bonnetov izrek pravi, da sta ob metriki in vseh podatkih o upogibanju, ki izpolnjujejo ustrezne enačbe združljivosti, vložitev in oblika določeni do togega gibanja.

Toda Pierre Ossian Bonnet je leta 1867 zastavil ostrejše vprašanje. Kaj če zmanjšamo količino podatkov o upogibanju? Ker metrika že intrinzično določa Gaussovo ukrivljenost, ali lahko ploskev enolično opišemo z metriko in funkcijo srednje ukrivljenosti?

Generično je odgovor pritrdilen. Beseda »generično« je pomembna. Geometrija ima pogosto izjemne primere: posebne ploskve, pri katerih običajna trditev o enoličnosti odpove. Odprto vprašanje je bilo, ali obstajajo kompaktni gladki primeri, pri katerih se metrika in srednja ukrivljenost ujemata, ploskvi pa v prostoru nista isti.

To je globalni Bonnetov problem. Novi članek ga reši s torusi.

# Kaj so skonstruirali avtorji

Avtorji skonstruirajo par gladkih torusov v R3, povezanih z izometrijo, ki ohranja srednjo ukrivljenost. To pomeni, da imajo pripadajoče točke enake intrinzične razdalje v okolici in enako vrednost srednje

ukrivljenosti, vendar ploskvi nista kongruentni.

Konstrukcija ni zgolj en numerični kuriozum. Torusa sta realno analitična — tako regularna, kot je geometrija, ki jo je mogoče opisati s potenčnimi vrstami, ne pa grobo zlepljena objekta — avtorji pa dokažejo, da njuni primeri generično niso povezani z nobeno izometrijo okoliškega prostora. Poleg tega pravijo, da konstrukcija zaradi funkcijskega parametra daje neštevno mnogo takih parov.

Pot do rezultata je tehnična. Uporablja zvezo med Bonnetovimi pari in izotermnimi ploskvami, razredom ploskev s posebnimi koordinatami ukrivljenostnih črt. Primeri nastanejo tako, da avtorji začnejo z izotermnimi torusi, pri katerih je ena družina ukrivljenostnih črt ravninska, nato pa uporabijo konstrukcijo, ki ustvari Bonnetov par. Po njihovih besedah je pristop zrasel iz računalniških poskusov z razdelitvijo torusa na mrežo $5 \times 7$ štirikotnikov, pri čemer je diskretna diferencialna geometrija služila kot vodilo do gladkega rezultata.

Vizualni rezultat je lažje razumeti kot dokaz. Torusa v članku imata ujemajoče se geometrijske podatke, vendar vidno različno globalno razporeditev: na sliki 1 so ustrezni veliki »mehurji« na enem torusu bližje skupaj kot na drugem. Ta vidna razlika ni risarska zvijača. Izrek pravi, da ploskvi v prostoru nista enake oblike, čeprav se izbrani lokalni podatki ujemajo.

[figure_pair pending]

Slika 1 iz članka prikazuje numerični primer torusov Bonnetovega para, tukaj kot par slik. Panela nista dva pogleda istega torusa, temveč dva različna torusa iz para. Sive mrežne črte pomagajo slediti pripadajočim koordinatam ploskve, barvne krivulje pa označujejo pripadajoče zanke ukrivljenostnih črt. Bistvo slike je globalno neujemanje: veliki mehurji so na obeh torusih vidno razporejeni drugače, čeprav izrek pravi, da imata ploskvi isto intrinzično metriko in enako srednjo ukrivljenost v pripadajočih točkah.

## Zakaj to ni protislovje

Rezultat ne pravi, da je geometrija poljubna ali da meritve niso uporabne.

Pravi, da določen zmanjšan nabor podatkov — metrika in srednja ukrivljenost — ne zadošča vedno za enolično določitev kompaktne ploskve. Klasični izrek o enoličnosti uporablja bogatejše podatke o upogibanju. Srednja ukrivljenost je le povprečje dveh glavnih ukrivljenosti. Pove, koliko se ploskev v točki povprečno upogiba, ne ohrani pa vseh informacij o smernem upogibanju.

Prav ta razlika je bistvena. Dve ploskvi se lahko ujemata v razdaljah po ploskvi in v povprečni ukrivljenosti v vsaki pripadajoči točki, hkrati pa se razlikujeta v tem, kako je upogibanje razporejeno v prostoru.

Članek tudi ne trdi, da je taka dvoumnost tipična. Uvod je previden: generično metrika in srednja ukrivljenost določata ploskev. Bonnetovi pari so izjeme. Njihova vrednost je prav v tem, da pokažejo, da taka izjema obstaja tudi v kompaktnem, gladkem in analitičnem okolju, kjer je vprašanje ostalo nerešeno.

# Katera stara vprašanja s tem zaprejo

Prvo je globalni Bonnetov problem: ali obstajata dve nekongruentni kompaktni gladki vložitvi v tridimenzionalnem evklidskem prostoru, povezani z izometrijo in z enako srednjo ukrivljenostjo v pripadajočih točkah? Avtorji odgovorijo pritrdilno.

Drugo je Cohn-Vossen-Bergerjev problem: ali obstajata dve izometrični kompaktni analitični ploskvi v evklidskem tridimenzionalnem prostoru, ki nista povezani z izometrijo okoliškega prostora? Tudi tu je odgovor pritrdilen, z analitičnima torusoma iz iste konstrukcije.

Analitični del je pomemben. Starejši primeri neenoličnosti za kompaktne ploskve so lahko temeljili na manjši regularnosti ali lokalnih spremembah. Ti torusi niso zgolj gladek objekt, pri katerem bi na enem mestu zamenjali izboklino. Članek poudarja, da pripadajoče okolice nikjer niso lokalno kongruentne: razlika je porazdeljena po konstrukciji in ni skrita v enem mestu zlepljenja.

# Zakaj je pomembno

Gre za čisto matematiko, vendar je intuicija širša. Oblika je lahko v enem smislu preveč določena z meritvami in v drugem še vedno neenolična. Ni odločilno, koliko podatkov imamo, temveč ali vsebujejo pravo vrsto informacij.

Metrika in srednja ukrivljenost se zdita močan par, ker združujeta notranje razdalje z zunanjo mero upogibanja. Kompaktni Bonnetov par pokaže vrzel: povprečna ukrivljenost ni celotna informacija o ukrivljenosti. Lokalno ujemanje ne zagotavlja vedno globalne identifikacije. Analitična regularnost sama po sebi ne zagotovi enoličnosti.

To je uporaben nauk tudi zunaj tega izreka. V geometriji inverzni problemi pogosto sprašujejo, ali množica meritev določi objekt, ki jih je ustvaril. Ta članek za en klasičen problem ploskev daje oster nov odgovor: ne vedno, tudi kadar je objekt kompakten, gladek in analitičen.

# Kratek povzetek

Bobenko, Hoffmann in Sageman-Furnas skonstruirajo prve kompaktne Bonnetove pare: dva nekongruentna gladka torusa v R3, povezana z izometrijo in z enako srednjo ukrivljenostjo v pripadajočih točkah. Njuni primeri so realno analitični in generično niso povezani z nobeno izometrijo okoliškega prostora, s čimer po formulaciji članka rešijo tako globalni Bonnetov problem kot Cohn-Vossen-Bergerjevo vprašanje analitične enoličnosti. Rezultat ne ruši klasične teorije ploskev; kaže, da zmanjšan nabor podatkov — metrika in srednja ukrivljenost — ne zadošča vedno za enolično določitev kompaktne ploskve.

# Preverjanje brez olepševanja

**Kaj članek pokaže:** Kompaktni gladki Bonnetovi pari obstajajo. Natančneje, avtorji izrecno skonstruirajo torusa v R3 z isto metriko in isto funkcijo srednje ukrivljenosti v pripadajočih točkah, ki pa nista kongruentna.

**Kaj je verjetno, vendar ni bistvo rezultata:** Da lahko računalniško in diskretno-geometrijsko raziskovanje vodi do zahtevnih gladkih konstrukcij. Članek pravi, da je bila ta pot pomembna, vendar rezultat stoji na dokazu, ne na numerični sliki.

**Česa ne pokaže:** Da so vse ali večina ploskev dvoumne. Generična trditev o enoličnosti ostaja del ozadja. Gre za izjemne, vendar odločilne protiprimere.

**Glavne omejitve za splošnega bralca:** Dokaz je zelo tehničen in sodi v diferencialno geometrijo: izotermne ploskve, klasifikacije Bonnetovih parov, periodni pogoji in analitična konstrukcija. Pomen izreka je mogoče razumeti, ne da bi sledili vsej tej aparaturi.

**Koliko zaupanja naj ima splošni bralec?** Visoko v trditev izreka kot recenziran matematični rezultat. Previdnost je interpretativna, ne dokazna: berite ga kot »ta zmanjšan nabor geometrijskih podatkov ne določa vedno oblike«, ne kot »geometrija ne more določiti oblik«.

## Viri

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z
https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335
https://arxiv.org/abs/2110.06335