



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

وہ شکل جس کی شناخت مکمل نہیں ہو پاتی

Hoffmann Bobenko، اور Sageman-Furnas نے پہلے کمپیکٹ Bonnet جوڑے *construct* کیے: R^3 میں دو-*non-congruent* ہموار *tori* جو *isometry* سے متعلقہ ہیں اور مطابق نقاط پر ایک ہی اوسط خمیدگی رکھتے ہیں۔ مثالیں حقیقی *analytic* ہیں اور *generic* طور پر کسی *isometry ambient* سے متعلقہ نہیں؛ مقالہ کے مطابق اس سے عالمی Bonnet مسئلہ اور Cohn-Vossen-Berger کا *uniqueness analytic* سوال دونوں حل ہو جاتے ہیں۔ نتیجہ کلاسیکی سطح نظریہ کو رد نہیں کرتا۔ یہ دکھاتا ہے کہ $**$ میٹرک + اوسط خمیدگی $**$ جیسا *geometric reduced* ڈیٹا کمپیکٹ سطح کو ہمیشہ *uniquely* شناخت کرنا کرنے کے لیے کافی نہیں۔

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES · DOI: z-00159-025-s10240/1007.10

وہ شکل جس کی شناخت مکمل نہیں ہو پاتی

تصور کریں کہ آپ کو کسی سطح کو ناپنا ہے مگر اس سے باہر قدم رکھنے کی اجازت نہیں۔ آپ سطح کے ساتھ ساتھ فاصلے ناپ سکتے ہیں: اگر اسی سطح پر چلیں تو ایک نقطے سے دوسرے تک کتنا راستہ بنتا ہے۔ یہی اس سطح کی میٹرک ہے۔ اب باہر سے ایک اور پیمائش شامل کریں: ہر نقطے پر سطح کے اوسط خم، یعنی اوسط خمیدگی، کو ریکارڈ کریں۔

یہ معلومات بہت زیادہ لگتی ہیں۔ بہت سی سطحیں کے لیے واقعی کافی بھی ہوتی ہیں۔ اگر داخلی فاصلے اور اوسط-خمیدگی فنکشن دونوں معلوم ہوں تو فطری توقع یہ ہے کہ three-dimensional خلا میں شکل uniquely طے ہو جائے گی۔

Hoffmann Tim Bobenko، Alexander Sageman-Furnas Andrew نے اب کمپیکٹ سطحیں کی ایسی مثالیں بنائی ہیں جو اس توقع کو توڑ دیتی ہیں۔ ان کے مقالہ میں دو doughnut — tori جیسی سطحیں، اگرچہ عام گول doughnuts نہیں — isometric ہیں اور مطابق نقاط پر ان کی اوسط خمیدگی بھی ایک جیسی ہے، مگر وہ congruent نہیں۔ ایک کو reflect یا translate rotate کر کے دوسرے میں نہیں بدلا جا سکتا۔ خلا میں وہ واقعی دو مختلف immersions ہیں۔

اس شعبے کی زبان میں یہ کمپیکٹ Bonnet جوڑے ہیں۔ مقالہ انہیں پہلی ایسی کمپیکٹ مثالیں قرار دیتا ہے۔

مسئلہ کیا تھا

کلاسیکی سطح نظریہ دو طرح کی معلومات کو الگ کرتی ہے۔

میٹرک سطح کے اندر ناپے گئے فاصلے بتاتی ہے۔ ایک ہموار چادر کو سلنڈر میں لپیٹ دیں تو اس کی داخلی میٹرک وہی رہتی ہے: چادر پر چلنے والی چھوٹی چیونٹی صرف فاصلہ ناپ کر یہ نہیں جان سکے گی کہ چادر roll ہو گئی ہے۔ دوسری طرف مکمل دوسرا fundamental شکل خلا میں سطح کے خم کے بارے میں کہیں زیادہ معلومات دیتی ہے۔ کلاسیکی Bonnet قضیہ کہتا ہے کہ اگر میٹرک اور مکمل bending ڈیٹا مناسب compatibility مساوات پوری کرتے ہوں تو motion rigid immersion uniquely determined ہوتی ہے۔

مگر 1867 میں Bonnet Ossian Pierre نے زیادہ تیز سوال پوچھا۔ اگر bending ڈیٹا کم کر دیا جائے تو؟ چونکہ Gaussian خمیدگی میٹرک سے intrinsically طے ہو جاتی ہے، کیا میٹرک + اوسط خمیدگی فنکشن کسی سطح کو characterize کرنے کے لیے کافی ہیں؟

عمومی صورت میں جواب ہاں ہے۔ عمومی لفظ اہم ہے۔ ہندسہ میں exceptional کیسز بار بار سامنے آتے ہیں: خاص سطحیں جہاں عام uniqueness بیان ناکام ہو جاتی ہے۔ کھلا سوال یہ تھا کہ کیا ایسی کمپیکٹ ہموار مثالیں موجود ہیں جن میں میٹرک اور اوسط خمیدگی ایک جیسی ہوں مگر خلا میں سطحیں مختلف ہوں۔

اسی کو عالمی Bonnet مسئلہ کہا جاتا ہے۔ نئے مقالے کا جواب tori کے ذریعے ”ہاں“ ہے۔

مصنفین نے کیا بنایا

مصنفین R3 میں ہموار tori کا ایک جوڑا construct کرتے ہیں جو اوسط-خمیدگی-isometry preserving سے ایک دوسرے سے متعلق ہے۔ یعنی مطابق نقاط کے آس پاس داخلی فاصلے ایک جیسے ہیں اور اوسط خمیدگی کی قدر بھی ایک جیسی ہے، مگر دونوں

سطحیں congruent نہیں۔

ساخت صرف ایک عددی curiosity نہیں۔ Tori حقیقی تحلیلی ہیں — یعنی طاقت-series ہندسہ جتنے ہموار، نہ کہ کھردرا ٹکڑے کو جوڑ کر بنائی گئی اشیا — اور مصنفین ثابت کرتے ہیں کہ عمومی طور پر ان کی مثالیں کسی **isometry ambient** سے متعلقہ نہیں۔ وہ یہ بھی کہتے ہیں کہ ساخت ایک فعلی پیرامیٹر رکھتی ہے، اس لیے ایسے جوڑے many uncountably ہیں۔

ثبوت کا راستہ تکنیکی ہے۔ یہ Bonnet جوڑے اور **isothermic** سطحیں کے تعلق کو استعمال کرتا ہے؛ یہ سطحیں کی ایک class ہے جس میں خمیدگی-لائن coordinates خاص ساخت رکھتے ہیں۔ مثالیں ایسے tori isothermic سے شروع ہوتی ہیں جن میں خمیدگی لائنیں کی ایک خاندان planar ہوتی ہے، پھر ایک ساخت اس torus سے Bonnet جوڑا پیدا کرتی ہے۔ مصنفین لکھتے ہیں کہ طریقہ ایک torus کی 7×5 decomposition quad پر computational تجربات سے ابھرا؛ differential discrete ہندسہ نے ہموار قضیہ تک پہنچنے کے لیے رہنما کا کام کیا۔

بصری نتیجہ ثبوت سے آسان ہے۔ مقالے کے دو tori میں منتخب geometric ڈیٹا ایک جیسا ہے مگر عالمی درجہ بندی صاف مختلف دکھائی دیتی ہے: مصنفین کی Figure 1 میں مطابق بڑے "bubbles" ایک torus میں ایک دوسرے کے زیادہ قریب ہیں۔ یہ ڈرائنگ کا دھوکا نہیں۔ قضیہ کہتا ہے کہ خلا میں سطحیں واقعی ایک شکل نہیں، حالانکہ منتخب مقامی ڈیٹا مطابقت کرتا ہے۔

[figure_pair pending]

مقالے کی Figure 1 میں جوڑا-Bonnet tori کی عددی مثال figure paired کے طور پر دکھائی گئی ہے۔ دونوں پینلز ایک ہی torus کے دو زاویے نہیں بلکہ جوڑا کے دو مختلف tori ہیں۔ سرمئی mesh لائنیں مطابق سطح coordinates کو پیروی کرنے میں مدد دیتی ہیں، اور coloured منحنی مطابق خمیدگی-لائن loops دکھاتی ہیں۔ تصویر کا نکتہ عالمی mismatch ہے: بڑے bubbles واضح طور پر مختلف مقامات میں ہیں، حالانکہ قضیہ کے مطابق مطابق نقاط پر دونوں سطحیں کی داخلی میٹرک اور اوسط خمیدگی ایک جیسی ہے۔

یہ contradiction کیوں نہیں

نتیجہ یہ نہیں کہ ہندسہ من مانا ہے یا پیمائشیں بے کار ہیں۔

یہ صرف یہ کہتا ہے کہ ایک خاص کم کیا ڈیٹا سیٹ — میٹرک plus اوسط خمیدگی — کمپیکٹ سطح کو ہمیشہ uniquely شناخت کرنے کے لیے کافی نہیں۔ مکمل کلاسیکی uniqueness قضیہ bending richer معلومات استعمال کرتا ہے۔ اوسط خمیدگی دو curvatures principal کا صرف اوسط ہے۔ یہ بتاتی ہے کہ کسی نقطہ پر سطح اوسطاً کتنا bend کرتی ہے، مگر سمتی bending کی پوری معلومات محفوظ نہیں رکھتی۔

اصل بات یہی فرق ہے۔ دو سطحیں اپنے داخلی فاصلے اور ہر مطابق نقطہ پر اوسط bending میں agree کر سکتی ہیں، جبکہ خلا میں bending کی arrangement مختلف ہو۔

مقالہ یہ بھی نہیں کہتا کہ ambiguity عام ہے۔ Introduction واضح ہے: generically میٹرک + اوسط خمیدگی سطح کو determine کرتی ہے۔ Bonnet جوڑے exceptional ہیں۔ ان کی اہمیت یہی ہے کہ وہ دکھاتے ہیں کہ کمپیکٹ، ہموار اور تحلیلی ترتیب میں بھی exception واقعی موجود ہے — وہی ترتیب جہاں یہ سوال کھلا تھا۔

کون سے پرانے سوال بند ہوئے

پہلا عالمی **Bonnet** مسئلہ ہے: کیا Euclidean three-dimensional خلا میں دو غیر-congruent کمپیکٹ ہموار immersions ہو سکتی ہیں جو isometry سے متعلقہ ہوں اور مطابق نقاط پر ایک ہی اوسط خمیدگی رکھتی ہوں؟ مصنفین کا جواب ہاں ہے۔

دوسرا **Cohn-Vossen-Berger** مسئلہ ہے: کیا Euclidean خلا-three میں دو isometric کمپیکٹ تحلیل سطحیں ہو سکتی ہیں جو isometry ambient سے متعلقہ نہ ہوں؟ اسی ساخت کے تحلیل tori کے ذریعے جواب پھر ہاں ہے۔

Analyticity اہم ہے۔ کمپیکٹ سطحیں کی پہلے کی غیر-uniqueness مثالیں کم regularity یا مقامی modifications پر انحصار کر سکتی تھیں۔ یہ محض ہموار شے نہیں جس کے ایک ٹکڑا میں bump بدل دیا گیا ہو۔ مقالہ زور دیتا ہے کہ مطابق neighbourhoods کہیں بھی congruent locally نہیں: فرق پوری ساخت میں پھیلا ہوا ہے، کسی seam repair میں چھپا نہیں۔

یہ کیوں اہم ہے

یہ خالص ریاضی ہے، مگر وجدان وسیع ہے۔ ایک شکل ایک معنی میں بہت زیادہ ناپا گیا ہو سکتی ہے، پھر بھی دوسرے معنی میں underidentified رہ سکتی ہے۔ اہم سوال ڈیٹا کی مقدار نہیں بلکہ یہ ہے کہ ڈیٹا میں صحیح قسم کی معلومات شامل ہے یا نہیں۔

میٹرک + اوسط خمیدگی مضبوط لگتی ہے کیونکہ داخل فاصلے کو bending extrinsic پیمائش کے ساتھ ملاتی ہے۔ کمپیکٹ Bonnet جوڑا دکھاتا ہے کہ خلا کہاں ہے: اوسط bending، مکمل bending نہیں۔ مقامی مطابقت ہمیشہ عالمی شناخت نہیں۔ تحلیل regularity بھی uniqueness کی جادوئی ضمانت نہیں۔

یہ سبق قضیہ سے باہر بھی مفید ہے۔ ہندسہ میں problems inverse بار بار پوچھتے ہیں کہ پیمائشیں کا کوئی سیٹ اس شے کو determine uniquely کرتا ہے یا نہیں جس نے وہ پیمائشیں پیدا کیں۔ یہ مقالہ ایک کلاسیکی سطح مسئلہ کے لیے تیز جواب دیتا ہے: ہمیشہ نہیں — حتیٰ کہ شے کمپیکٹ، ہموار اور تحلیل ہو۔

صاف خلاصہ

Hoffmann Bobenko، اور Sageman-Furnas نے پہلے کمپیکٹ Bonnet جوڑے construct کیے: R^3 میں دو غیر-congruent ہموار tori جو isometry سے متعلقہ ہیں اور مطابق نقاط پر ایک ہی اوسط خمیدگی رکھتے ہیں۔ مثالیں حقیقی تحلیل ہیں اور عمومی طور پر کسی isometry ambient سے متعلقہ نہیں؛ مقالے کے مطابق اس سے عالمی Bonnet مسئلہ اور Cohn-Vossen-Berger کا تحلیل uniqueness سوال دونوں حل ہو جاتے ہیں۔ نتیجہ کلاسیکی سطح نظریہ کو رد نہیں کرتا۔ یہ دکھاتا ہے کہ میٹرک + اوسط خمیدگی جیسا کم کیا geometric ڈیٹا کمپیکٹ سطح کو ہمیشہ uniquely شناخت کرنے کے لیے کافی نہیں۔

بلا مبالغہ جانچ

مقالے کا دکھانا ہے: کمپیکٹ ہموار Bonnet جوڑے موجود ہیں۔ خاص طور پر، مصنفین R^3 میں ایسے construct tori کرتے ہیں جن کی میٹرک اور مطابق نقاط پر اوسط-خمیدگی فنکشن ایک جیسی ہے، مگر وہ congruent نہیں۔

کیا قرین قیاس ہے مگر اصل نقطہ نہیں: Computational اور exploration discrete-geometric مشکل ہموار constructions تک رہنمائی دے سکتی ہے۔ مصنفین کہتے ہیں کہ یہ راستہ اہم تھا، مگر نتیجہ عددی تصویر نہیں بلکہ ثبوت پر قائم ہے۔

یہ کیا نہیں دکھاتا: یہ نہیں کہ تمام یا زیادہ تر سطحیں ambiguous ہیں۔ عمومی uniqueness پس منظر میں بدستور برقرار ہے۔ یہ exceptional مگر فیصلہ کن counterexamples ہیں۔

عام قاری کے لیے اہم: **limitation:** ثبوت بہت تکنیکی ہے اور differential ہندسہ کی مشینری استعمال کرتا ہے: isothermic سطحیں، جوڑا-Bonnet، period classifications، حالات اور تحلیلی ساخت۔ قضیہ کا مفہوم سمجھنے کے لیے پوری مشینری پیروی کرنا ضروری نہیں۔

عام قاری کو کتنا اعتماد رکھنا چاہیے؟ ہم مرتبہ جائزہ شدہ ریاضیاتی قضیہ کے بیان پر بہت زیادہ۔ احتیاط شواہد میں نہیں، تشریح میں ہے: اسے یوں پڑھیں کہ ”یہ کم کیا geometric ڈیٹا ہمیشہ شکل determine نہیں کرتا“، نہ کہ ”ہندسہ ساختیں کی شناخت نہیں کر سکتی۔“

ماخذ

-025-s10240/1007.10 DOI , (2025) l'IHES de mathematiques Publications Sageman-Furnas, and Hoffmann Bobenko, z-00159

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

arXiv:2110.06335 Sageman-Furnas, and Hoffmann Bobenko,

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>