



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

Tori méjì lè ní geometry local kan náà, síbẹ wọn lè jẹ àwọn apẹrẹ tó yàtò

Construction kan nínú Publications mathematiques de l'IHES fúnni ní compact Bonnet pairs àkókò: tori smooth, real-analytic méjì nínú àyè oníwọn méta tí wọn ní intrinsic metric kan náà àti mean curvature kan náà ní àwọn ojú tó bá ara wọn mu, síbẹ wọn kò jẹ surface kan náà títi dé rigid motion. Abajade náà pa àwọn uniqueness questions àtíjọ nínú surface geometry, ó sì jẹ counterexample tó muna sí èrò tó rọrùn láti gbà pé local measurements tó pọ gbọdọ dá compact shape kan mọ.

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, Publications mathematiques de l'IHES · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

Apẹrẹ tí kò fẹ jẹ kí a dá a mò nípasẹ àwọn ìwọn wònyí

Foju inú wo pé o fẹ wọn ojú-ilẹ kan láì jẹ kí o jáde kúrò lórí rẹ. O lè wọn àwọn ìjìnnà lórí ojú-ilẹ náà: bí ojú kan ẹ jìnnà sí omiì tí o bá ń rìn lórí ojú-ilẹ funra rẹ. Èyí ni **metric** ojú-ilẹ náà. Ní bá'yí, fi ìwọn mû kún un láti “ita”: ní gbogbo ojú, ẹ àkòsílẹ̀ ìgòkè-gòkè apapọ̀ ojú-ilẹ náà, iye **mean curvature** rẹ.

Ó dà bí ẹni pé ìṣofúnni púpọ̀ ni. Fún ọpọ̀ ojú-ilẹ, ó tó. Tí o bá mọ àwọn ìjìnnà inú ojú-ilẹ àti iṣẹ **mean curvature** rẹ, o lè retí pé apẹrẹ rẹ nínú àyè oníwọn mètá yóò dájú.

Alexander Bobenko, Tim Hoffmann àti Andrew Sageman-Furnas ti kọ àwọn ojú-ilẹ compact tí ó tako ìrètí yẹn. Nínú ìwé ìwádíí wọn, wọn fi tori méjì hàn — ojú-ilẹ bí donut, bó tilẹ̀ jẹ pé kì í ẹ donut yíká lasan — tí wọn jẹ **isometric** tí wọn sì ní **mean curvature** kan náà ní àwọn ojú tó bá ara wọn mu, sùgbọ́n tí wọn kò **congruent**. O kò lè yí ọkan ká, gbe e lọ tàbí fi àwòrán díjí rẹ ẹ e kí ó di ekeji. Wọn jẹ immersion méjì tó yàtò gidi nínú àyè.

Ní èdè ẹka yí, wọn jẹ **compact Bonnet pairs**. ìwé ìwádíí náà sọ pé wọn ni àpẹrẹ àkókó irú bẹ.

Kí ni ìṣòro náà?

Ìmọ̀ ojú-ilẹ classical máa ń yà ìṣofúnni sí oríṣi méjì.

Metric ń sọ fún wa àwọn ìjìnnà tí a wọn lórí ojú-ilẹ. A lè yí bẹ̀bà pẹ̀lẹ̀bẹ̀ kan di cylinder láì yí metric inú rẹ padà: kokoro kékeré kan tó ń rìn lórí bẹ̀bà náà kò ní mò pé a ti yí i ká bí ó bá ń wọn ìjìnnà nìkan. **Full second fundamental form** ń sọ ohun púpọ̀ sí i nípa bí ojú-ilẹ ẹ ní tẹ̀ nínú àyè. Bonnet theorem classical sọ pé, tí a bá ní metric àti gbogbo ìṣofúnni tẹ̀-bí-tẹ̀ tó sì tẹ̀lẹ̀ àwọn equation ìbámu tó yẹ, immersion náà dájú tití dé rigid motion.

Sùgbọ́n ní 1867, Pierre Ossian Bonnet béèrè ìbéèrè tó muna sí i. Kí ló ẹ̀lẹ̀ tí a bá dín ìṣofúnni tẹ̀-bí-tẹ̀ kù? Níwọn bí metric ti ń pinu Gaussian curvature láti inú ojú-ilẹ funra rẹ, ẹ a lè dá ojú-ilẹ kan mò pẹ̀lú metric àti iṣẹ **mean curvature** nìkan?

Ní gbogbogbòò, ìdáhùn ni bẹ̀ẹ̀ ni. Ọ̀rọ̀ “ní gbogbogbòò” ẹ pàtàkì. Geometry máa ń ní àwọn ọ̀ràn àrà: àwọn ojú-ilẹ pàtàkì tí ìlànà uniqueness tó wọ̀pọ̀ kò ẹ̀ṣẹ̀. Ìbéèrè tí ó ẹ̀ sílẹ̀ ni bóyá àpẹrẹ compact, smooth lè wà níbi tí metric àti **mean curvature** fi bá ara wọn mu sùgbọ́n tí àwọn ojú-ilẹ náà kò jẹ ohun kan náà nínú àyè.

Èyí ni **Global Bonnet ìṣòro**. ìwé ìwádíí tuntun yí dá a lóhùn pẹ̀lú tori.

Ohun tí àwọn olùkòwé kó

Àwọn olùkòwé kó tọ́kọ́taya tori smooth kan nínú R^3 tí isometry tó ń pa **mean curvature** mọ̀ so pọ̀. Ìtumọ̀ rẹ̀ ni pé àwọn ojú tó bá ara wọn mu ní àwọn ìjìnnà inú ojú-ilẹ kan náà àti iye **mean curvature** kan náà, sùgbọ́n àwọn ojú-ilẹ méjèjì kò congruent.

Kíkọ náà ju àṣírí numerical kan lọ. Tori náà jẹ **gidi analytic** — ó ní ìtẹ̀lọ̀run bí geometry power series, kì í ẹ nkan tí a fọ̀ pọ̀ mọ̀ra láti àwọn àpá rough — àwọn olùkòwé sì fi proof hàn pé ní gbogbogbòò àwọn àpẹrẹ wọn

kò ní ambient isometry kankan tí ó so wọn pọ̀. Wọn tún sọ pé construction náà fúnni ní uncountably many pairs, nítorí pé ó ní functional parameter.

Ọ̀nà proof jẹ́ technical. Ó lo ìbáṣepọ̀ láàárín Bonnet pairs àti **isothermic ojú**, èka ojú-ilẹ̀ kan tí ó ní curvature-line coordinates pàtàkì. Àwọn àpẹrẹ náà bèrẹ̀ láti isothermic tori tí ìdílẹ̀ kan ti curvature lines rẹ̀ wà lórí plane, lẹ́yìn náà wọn lo construction kan tó ní dá Bonnet pair sílẹ̀. Àwọn olùkòwé sọ pé ọ̀nà náà dagba láti computational ìdánwò pẹ̀lú 5×7 quad decomposition ti torus, níbi tí discrete differential geometry ti ṣiṣẹ́ gégé bí ìtọ̀sọ̀nà sí abajade smooth.

Abajade tí a lè rí rọ̀rùn láti lóye ju proof lọ. Tori méjì tó wà nínú ìwé ìwádíí ní ìṣofúnni geometric tó bá ara rẹ̀ mu ṣùgbọ̀n ìtòlẹ́ṣẹ́ṣẹ́ àgbáyé wọn yàtò ní kedere: nínú Figure 1 àwọn olùkòwé, àwọn “bubbles” rí lá tó bá ara wọn mu sún mọ́ra ju lórí torus kan lọ. Ìyàtò yí kì í ṣe ètan àwòrán. Theorem náà sọ pé ojú-ilẹ̀ méjèjì kò jẹ́ apẹrẹ kan náà nínú àyè, bó tilẹ̀ jẹ́ pé àwọn dátà agbègbè tí a yan bá ara wọn mu.

[figure_pair pending]

Figure 1 nínú ìwé ìwádíí fí numerical example ti Bonnet-pair tori hàn gégé bí àwòrán méjì tí a so pọ̀. Àwọn panel méjì náà kì í ṣe irisi méjì ti torus kan: wọn jẹ́ tori méjì tó yàtò nínú pair náà. Grey mesh lines ní ran ojú lówọ̀ láti tópa ojú coordinates tó bá ara wọn mu, àwọn coloured curves sì ní samisi curvature-line loops tó bá ara wọn mu. Kókó àwòrán ní mismatch àgbáyé: àwọn bubble rí lá wà ní ipò tó yàtò ní gbangba, bí theorem tilẹ̀ sọ pé tori méjèjì ní intrinsic metric kan náà àti mean curvature kan náà ní àwọn ojú tó bá ara wọn mu.

Kí nìdí tí èyí kì í ṣe contradiction?

Abajade náà kò sọ pé geometry jẹ́ aláìlànà, tàbí pé ìwọn kò wúlò.

Ó sọ pé dátà set kan tí a dín kù — metric pẹ̀lú mean curvature — kò tó ní gbogbo igba láti dá compact ojú kan mọ̀ ní ọ̀nà tó yàtò sí gbogbo omi. Classical uniqueness theorem tó pé lo ìṣofúnni tẹ̀-bí-tẹ̀ tó pọ̀ sí i. Mean curvature jẹ́ apapọ̀ principal curvatures méjì nikan. Ó sọ iye tí ojú-ilẹ̀ ní tẹ̀ ní apapọ̀ ní ojú kan, ṣùgbọ̀n kò pa gbogbo ìṣofúnni nípa ìtọ̀sọ̀nà tí tẹ̀-bí-tẹ̀ ní gba mọ̀.

Ìyàtò yẹn ni kókó gbogbo. Ojú-ilẹ̀ méjì lè bá ara wọn mu lórí àwọn ìjìnnà inú ojú-ilẹ̀ àti lórí tẹ̀-bí-tẹ̀ apapọ̀ ní gbogbo ojú tó bá ara wọn mu, ṣùgbọ̀n wọn lè yàtò ní bí tẹ̀-bí-tẹ̀ náà ṣe ṣètò nínú àyè.

Ìwé ìwádíí náà kò tún sọ pé ambiguity yí wọ̀pọ̀. Introduction rẹ̀ sọra: ní gbogbogbò, metric pẹ̀lú mean curvature máa ní pinnu ojú-ilẹ̀. Bonnet pairs jẹ́ exceptional. Ítọ́ye wọn gan-an ní pé wọn fí hàn pé exception náà wà nínú compact, smooth, analytic setting tí a kò tii yanju rí.

Àwọn ìbéèrè àtijọ́ tí ó parí

Ìbéèrè àkókó ni Global Bonnet ìṣòro: ṣé compact smooth immersions méjì lè wà nínú three-dimensional Euclidean space, tí wọn kò congruent, ṣùgbọ̀n tí isometry kan so wọn pọ̀ tí wọn sì ní mean curvature kan náà ní àwọn ojú tó bá ara wọn mu? Àwọn olùkòwé dáhùn pé bẹ̀ẹ̀ ni.

Èkejì ni Cohn-Vossen-Berger ìṣòro: ẹ́ compact analytic ojú méjì tó isometric lè wà nínú Euclidean three-space tí ambient isometry kankan kò so pọ̀? Lẹ́ẹ̀kan sí i, ìdáhùn ni bèyè ni, pẹ̀lú analytic tori tí construction kan náà fúnni.

Apá analytic ẹ́ pàtàkì. Àwọn àpẹẹrẹ non-uniqueness àtijọ́ fún compact ojú lè gbára lé regularity tó kéré tàbí agbègbè alterations. Tori wònyí kì í ẹ́ smooth object kan tí a kan rọ̀pọ̀ bump ní patch kan. ìwé ìwádíí náà tẹ̀numọ́ pé corresponding neighbourhoods kò congruent locally ní ibikíbi: ìyàtọ́ náà tàn káàkiri construction náà, kò fara pamọ́ sí seam itúnṣe kan.

Kí nìdí tí ó fi ẹ́ pàtàkì?

Pure mathematics ni èyí, ṣùgbọ́n intuition rẹ̀ gbòdòrò. Apẹẹrẹ kan lè dà bí ẹ̀ni pé dátà rẹ̀ pọ̀ ju tó, síbẹ̀ a kò tì ní dátà tó tọ́ láti dá a mọ́. Ohun tó ẹ́ pàtàkì kì í ẹ́ iye dátà tí o ní, bí kò ẹ́ bóyá dátà náà ní irú ìṣofúnni tó yẹ.

Metric pẹ̀lú mean curvature dà bí dátà tó lágbara nítorí pé ó darapọ̀ àwọn ìjìnnà inú ojú-ilẹ̀ mọ́ ìwọn tè-bí-tẹ̀ láti ita. Compact Bonnet pair fi àláfó náà hàn: tè-bí-tẹ̀ apapọ̀ kì í ẹ́ gbogbo tè-bí-tẹ̀. Ìbámu agbègbè kò túmọ́ sí ìdánimọ́ global ní gbogbo igba. Analytic regularity kì í ẹ́ idan tí yóò fi uniqueness dájú.

Èkọ́ yí tún wúlò ju theorem yí lọ. Nínú geometry, **inverse ìṣòro** sáà maa ní beère bóyá ẹ́gbẹ̀ kan ti measurements lè pinnu ohun tó dá wọn sílẹ̀. ìwé ìwádíí yí fúnni ní ìdáhùn tuntun tó muna fún classical ojú ìṣòro kan: kì í ẹ́ ní gbogbo igba, paápáá tí ohun náà bá compact, smooth, tí ó sì analytic.

Àkótán kedere

Bobenko, Hoffmann àti Sageman-Furnas kọ́ compact Bonnet pairs àkókó: tori smooth méjì nínú R^3 tí kò congruent, tí isometry kan so pọ̀, tí wọn sì ní metric kan náà àti mean curvature function kan náà ní àwọn ojú tó bá ara wọn mu. Àwọn àpẹẹrẹ wọn jẹ́ gidi analytic, àti ní gbogbogbòdò ambient isometry kankan kò so wọn pọ̀; èyí yanju Global Bonnet ìṣòro àti Cohn-Vossen-Berger analytic uniqueness ibeèrè bí ìwé ìwádíí ẹ́ sọ. Abajade náà kò dojú classical ojú àbá-ẹ̀kọ́ dé; ó kan fi hàn pé dátà tí a dín kù sí metric pẹ̀lú mean curvature kò tó ní gbogbo igba láti dá compact ojú kan mọ́ uniquely.

Àyèwò láìsí àṣejù

Ohun tí ìwé ìwádíí fi hàn: Compact smooth Bonnet pairs wà. Ní pàtọ́, àwọn olùkòwé kọ́ tori nínú R^3 tí wọn ní metric àti mean-curvature function kan náà ní àwọn ojú tó bá ara wọn mu, ṣùgbọ́n tí wọn kò congruent.

Ohun tó ẹ́ ẹ́ ṣùgbọ́n tí kì í ẹ́ kókó: Computational àti discrete-geometric exploration lè tọ́ àwọn smooth constructions tó nira sóna. ìwé ìwádíí sọ pé ọ̀nà yí ẹ́ pàtàkì, ṣùgbọ́n proof ni abajade gbára lé, kì í ẹ́ numerical picture.

Ohun tí kò fi hàn: Pé gbogbo tàbí ọ̀pọ̀ jù lọ àwọn ojú ní ambiguity. Generic uniqueness statement sì jẹ́ apá abẹ̀lẹ̀. Àwọn yí jẹ́ exceptional ṣùgbọ́n decisive counterexamples.

Àwọn ààlà pàtàkì fún olùkà gbogboogbo: Proof náà technical gan-an, ó sì wà nínú differential geometry: isothermic ojú, Bonnet-pair classifications, period conditions àti analytic construction. Olùkà lè lóye ìtumọ theorem láì tẹlẹ gbogbo machinery náà.

Ìgbẹkẹlẹ wo ni olùkà gbogboogbo yẹ kí ó ní? Gíga fún theorem statement gégé bí peer-reviewed mathematical èsì. Ìṣọra tó yẹ jẹ lórí interpretation, kì í ẹrí: ka a bí “dátà geometric tí a dín kù yí kò pinnu apẹrẹ ní gbogbo igba,” kì í ẹ “geometry kò lè dá apẹrẹ mò.”

Àwọn orísun

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l’IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>