



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

两个环面可以有相同的局部几何，却仍是不同的形状

《*Publications mathématiques de l'IHÉS*》上的一项构造给出了第一批紧致 Bonnet 对：三维空间中两个光滑、实解析的环面，在对应点具有相同的内在度量与相同的平均曲率，却无法通过刚体运动彼此重合。这项结果解决了曲面几何中长久存在的唯一性问题，也提供了一个精确的反例，否定一个很诱人的想法：只要测得足够多的局部信息，就一定能识别出一个紧致形状。

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, *Publications mathématiques de l'IHÉS* · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

一个拒绝被唯一识别的形状

想象你要测量一个曲面，但不准离开它。你可以沿着表面量距离：如果只能在表面上行走，两点之间有多远。这就是曲面的度量。现在再加上一种从外部获得的信息：在每一点记录曲面的平均弯曲程度，也就是平均曲率。

这听起来已经是很多信息。对许多曲面而言，也确实足够。知道内在距离，再知道平均曲率函数，你很容易直觉认为三维空间中的形状应该就被唯一决定了。

Alexander Bobenko、Tim Hoffmann 与 Andrew Sageman-Furnas 现在构造出一组会打破这个直觉的紧致曲面。他们的论文给出两个环面——也就是甜甜圈形的曲面，虽然不是普通的圆甜甜圈——彼此等距，而且在对应点具有相同的平均曲率，却并不同余。你无法靠旋转、平移或反射把其中一个变成另一个。它们是真正不同的空间浸入。

用这个领域的语言来说，它们是紧致 Bonnet 对。论文称这是第一批这样的例子。

问题到底是什么

古典曲面理论会区分两类信息。

度量告诉你沿着曲面测得的距离。一张平纸卷成圆柱后，内在度量不会改变：一只小蚂蚁若只靠沿着纸面量距离，根本察觉不到纸被卷了起来。完整的第二基本形式则包含更多信息，描述曲面在空间中究竟如何弯曲。古典的 Bonnet 定理告诉我们，只要度量与完整的弯曲数据满足适当的兼容方程，曲面的浸入在刚体运动之外就是唯一的。

但在 1867 年，Pierre Ossian Bonnet 问了一个更尖锐的问题：如果把弯曲数据减少呢？既然度量本身已经决定高斯曲率，那么“度量加平均曲率函数”是否就足以刻画一个曲面？

一般情况下，答案是肯定的。关键就在“一般”这个词。几何学常有例外：某些特殊曲面会让通常成立的唯一性叙述失效。一直没有解决的问题是，是否存在紧致而光滑的例子，使两个曲面的度量与平均曲率都一致，却在空间中不是同一个形状。

这就是 Global Bonnet Problem。新论文用环面回答了它。

作者实际构造了什么

作者在 $\mathbb{R}^3$ 中构造了一对光滑环面，两者之间存在保持平均曲率的等距映射。这表示对应点附近的内在距离完全相同，而且平均曲率数值也一样，但两个曲面并不同余。

这个构造不只产生一个数值上的奇例。这些环面是实解析的——也就是具有幂级数等级的规则性，而不是拼拼补补的粗糙对象——而且作者证明，在一般情况下，这些例子无法通过任何环境空间的等距变换彼此对应。他们也指出，因为构造中含有一个函数参数，因此其实能得到不可数多组这样的曲面对。

技术路线相当复杂。它利用 Bonnet 对与 isothermic surfaces（等温曲面）之间的关系；这类曲面具有特殊的曲率线坐标。作者先从其中一族曲率线位于平面内的等温环面出发，再施用一个产生 Bonnet 对的构造。他们表示，这套方法源自一系列计算实验：先以环面的 5×7 四边形分割做离散微分几何实验，再把离散情况当成寻找光滑结果的指南。

视觉上的结果比证明容易理解。论文中的两个环面拥有相同的几何数据，却在整体空间中的摆放明显不同：在作者的图 1 里，对应的大型“泡状”部分，在其中一个环面上彼此更靠近。这不是绘图造成的错觉。定理说的正是：即使所选的局部几何数据完全一致，两个曲面在空间中仍不是同一个形状。

[figure_pair pending]

论文图 1 显示 Bonnet 对环面的一个数值例子，这里以并列图呈现。两个面板不是同一个环面的不同视角，而是这一对中的两个不同环面。灰色网格线方便追踪彼此对应的曲面坐标，彩色曲线则标出对应的曲率线循环。图的重点是整体排列的不一致：大型泡状区域的位置明显不同，尽管定理保证两个曲面在对应点具有相同的内在度量与相同的平均曲率。

为什么这并不矛盾

这个结果不是说几何学是任意的，也不是说测量没有用。

它说的是：某一组被简化过的数据——度量加平均曲率——并不总能唯一识别一个紧致曲面。完整的古典唯一性定理使用的是更丰富的弯曲信息。平均曲率只是两个主曲率的平均值。它告诉你某一点“平均而言”弯了多少，却没有保留所有方向上的弯曲信息。

差别就在这里。两个曲面可以在沿表面的距离与每个对应点的平均弯曲程度上完全一致，但弯曲在空间中的实际排列方式仍然不同。

论文也没有说这种模糊性是常态。作者在导论里很谨慎：一般而言，度量加平均曲率确实会决定曲面。Bonnet 对是例外。它们的重要性正是证明了：这种例外真的可以存在于紧致、光滑、解析的情境里，而这一点过去一直没有解决。

它解决了哪些老问题

第一个被解决的是 Global Bonnet Problem：在三维欧几里得空间中，是否存在两个彼此不同余的紧致光滑浸入，两者等距且在对点具有相同的平均曲率？作者的答案是肯定的。

第二个是 Cohn-Vossen-Berger 问题：欧氏三维空间中，是否存在两个等距、紧致、解析的曲面，却无法靠环境空间中的等距变换彼此对应？利用同一套构造得到的解析环面，答案同样是肯定的。

“解析”这一点很重要。过去紧致曲面的非唯一性例子，可能依赖较低的正则性或局部修改。这些环面并不是一个光滑对象，再在某小块区域替换掉一个凸起。论文强调，彼此对应的邻域在任何地方都不局部同余：差异分布在整体构造里，而不是藏在某个补丁接缝。

为什么重要

这是纯数学，但背后的直觉很广。某个形状可以在一种意义下看似“数据过多”，却在另一种意义下仍然没有被唯一识别。关键不在于数据有多少，而在于数据是否包含真正需要的那一类信息。

“度量加平均曲率”之所以让人觉得很强，是因为它结合了内在距离与外在弯曲量。紧致 Bonnet 对指出了缺口：平均弯曲不等于完整弯曲。局部一致并不总能推出整体唯一。解析正则性也不是保证唯一性的魔法。

这个教训也适用于定理之外。几何学的反问题经常在问：一组测量值是否足以决定产生它们的对象？这篇论文对一个古典曲面问题给出了非常鲜明的新答案：不一定，即使那个对象是紧致、光滑而且解析的。

简明总结

Bobenko、Hoffmann 与 Sageman-Furnas 构造出第一批紧致 Bonnet 对： $\mathbb{R}^3$ 中两个彼此不同余的光滑环面，两者等距，而且在对应点具有相同的平均曲率。他们的例子是实解析的，而且一般而言无法通过任何环境空间的等距变换彼此对应，因此依照论文的表述，同时解决了 Global Bonnet Problem 与 Cohn-Vossen-Berger 的解析唯一性问题。这项结果没有推翻古典曲面理论；它证明的只是，度量加平均曲率这组简化数据，并不总足以唯一识别一个紧致曲面。

不绕弯检查

论文证明了什么：紧致、光滑的 Bonnet 对确实存在。更具体地说，作者明确构造出 $\mathbb{R}^3$ 中的环面，它们在对点具有相同的度量与平均曲率函数，却彼此不同余。

合理但不是重点的推论：计算实验与离散几何探索，可以为困难的光滑几何构造提供方向。论文表示这条路径确实很重要，但结果成立靠的是证明，不是数值图像。

论文没有证明什么：它没有说所有或大多数曲面都有这种模糊性。一般情况下的唯一性仍然是背景的一部分。这些是例外，但它们是足以推翻“永远唯一”叙述的决定性反例。

一般读者最需要注意的限制：证明非常技术性，属于微分几何核心内容：等温曲面、Bonnet 对的分类、周期条件与解析构造。读者可以理解定理在说什么，而不必跟完整套技术机制。

一般读者应该有多大信心？对定理本身可以有高度信心：这是一项经同行评审的数学结果。真正需要小心的是解读，不是证据：应读成“这组简化几何数据并不总能决定形状”，而不是“几何学无法识别形状”。

来源

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>