



The CLEAN PAPER

WHAT THE PAPER SAYS · WHAT IT DOESN'T · WHY IT MATTERS

兩個環面可以有相同的局部幾何，卻仍是不同的形狀

《*Publications mathématiques de l'IHÉS*》上的一項構造給出了第一批緊緻 *Bonnet* 對：三維空間中兩個光滑、實解析的環面，在對應點具有相同的內在度量與相同的平均曲率，卻無法透過剛體運動彼此重合。這項結果解決了曲面幾何中長久存在的唯一性問題，也提供了一個精確的反例，否定一個很誘人的想法：只要量到足夠多的局部資訊，就一定能辨認出一個緊緻形狀。

Written by Laura Nesso · Cross-checked by Vera Rubin · Edited by Michele Renda · Figures by Nova Vela · AI-assisted, human-reviewed

Paper: *Compact Bonnet pairs: isometric tori with the same curvatures*, Alexander I. Bobenko, Tim Hoffmann, and Andrew O. Sageman-Furnas, *Publications mathématiques de l'IHÉS* · DOI: [10.1007/s10240-025-00159-z](https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z)

一個拒絕被唯一辨認的形狀

想像你要量測一個曲面，但不准離開它。你可以沿著表面量距離：如果只能在表面上行走，兩點之間有多遠。這就是曲面的度量。現在再加上一種從外部取得的資訊：在每一點記錄曲面的平均彎曲程度，也就是平均曲率。

這聽起來已經是很多資訊。對許多曲面而言，也確實足夠。知道內在距離，再知道平均曲率函數，你很容易直覺認為三維空間中的形狀應該就被唯一決定了。

Alexander Bobenko、Tim Hoffmann 與 Andrew Sageman-Furnas 現在構造出一組會打破這個直覺的緊緻曲面。他們的論文給出兩個環面——也就是甜甜圈形的曲面，雖然不是普通的圓甜甜圈——彼此等距，而且在對應點具有相同的平均曲率，卻並不同餘。你無法靠旋轉、平移或鏡射把其中一個變成另一個。它們是真正不同的空間浸入。

用這個領域的語言來說，它們是緊緻 Bonnet 對。論文稱這是第一批這樣的例子。

問題到底是什麼

古典曲面理論會區分兩類資訊。

度量告訴你沿著曲面量到的距離。一張平紙捲成圓柱後，內在度量不會改變：一隻小螞蟻若只靠沿著紙面量距離，根本察覺不到紙被捲了起來。完整的第二基本形式則包含更多資訊，描述曲面在空間中究竟如何彎曲。古典的 Bonnet 定理告訴我們，只要度量與完整的彎曲資料滿足適當的相容方程，曲面的浸入在剛體運動之外就是唯一的。

但在 1867 年，Pierre Ossian Bonnet 問了一個更尖銳的問題：如果把彎曲資料減少呢？既然度量本身已經決定高斯曲率，那麼「度量加平均曲率函數」是否就足以刻畫一個曲面？

一般情況下，答案是肯定的。關鍵就在「一般」這個詞。幾何學常有例外：某些特殊曲面會讓通常成立的唯一性敘述失效。一直沒有解決的問題是，是否存在緊緻而光滑的例子，使兩個曲面的度量與平均曲率都一致，卻在空間中不是同一個形狀。

這就是 Global Bonnet Problem。新論文用環面回答了它。

作者實際構造了什麼

作者在 $\mathbb{R}^3$ 中構造了一對光滑環面，兩者之間存在保持平均曲率的等距映射。這表示對應點附近的內在距離完全相同，而且平均曲率數值也一樣，但兩個曲面並不同餘。

這個構造不只產生一個數值上的奇例。這些環面是實解析的——也就是具有冪級數等級的規則性，而不是拼拼補補的粗糙物件——而且作者證明，在一般情況下，這些例子無法透過任何環境空間的等距變換彼此對應。他們也指出，因為構造中含有一個函數參數，因此其實能得到不可數多組這樣的曲面對。

技術路線相當複雜。它利用 Bonnet 對與 isothermic surfaces（等溫曲面）之間的關係；這類曲面具有特殊的曲率線座標。作者先從其中一族曲率線位於平面內的等溫環面出發，再施用一個產生 Bonnet 對的構造。他們表示，這套方法源自一系列計算實驗：先以環面的 5×7 四邊形分割做離散微分幾何實驗，再把離散情況當成尋找光滑結果的指南。

視覺上的結果比證明容易理解。論文中的兩個環面擁有相同的幾何資料，卻在整體空間中的擺放明顯不同：在作者的圖 1 裡，對應的大型「泡狀」部分，在其中一個環面上彼此更靠近。這不是繪圖造成的錯覺。定理說的正是：即使所選的局部幾何資料完全一致，兩個曲面在空間中仍不是同一個形狀。

[figure_pair pending]

論文圖 1 顯示 Bonnet 對環面的一個數值例子，這裡以並列圖呈現。兩個面板不是同一個環面的不同視角，而是這一對中的兩個不同環面。灰色網格線方便追蹤彼此對應的曲面座標，彩色曲線則標示對應的曲率線迴圈。圖的重點是整體排列的不一致：大型泡狀區域的位置明顯不同，儘管定理保證兩個曲面在對應點具有相同的內在度量與相同的平均曲率。

為什麼這並不矛盾

這個結果不是說幾何學是任意的，也不是說量測沒有用。

它說的是：某一組被簡化過的資料——度量加平均曲率——並不總能唯一辨認一個緊緻曲面。完整的古典唯一性定理使用的是更豐富的彎曲資訊。平均曲率只是兩個主曲率的平均值。它告訴你某一點「平均而言」彎了多少，卻沒有保留所有方向上的彎曲資訊。

差別就在這裡。兩個曲面可以在沿表面的距離與每個對應點的平均彎曲程度上完全一致，但彎曲在空間中的實際排列方式仍然不同。

論文也沒有說這種模糊性是常態。作者在導論裡很謹慎：一般而言，度量加平均曲率確實會決定曲面。Bonnet 對是例外。它們的重要性正是證明了：這種例外真的可以存在於緊緻、光滑、解析的情境裡，而這一點過去一直沒有解決。

它解決了哪些老問題

第一個被解決的是 Global Bonnet Problem：在三維歐幾里得空間中，是否存在兩個彼此不同餘的緊緻光滑浸入，兩者等距且在對應點具有相同的平均曲率？作者的答案是肯定的。

第二個是 Cohn-Vossen-Berger 問題：歐氏三維空間中，是否存在兩個等距、緊緻、解析的曲面，卻無法靠環境空間中的等距變換彼此對應？利用同一套構造得到的解析環面，答案同樣是肯定的。

「解析」這一點很重要。過去緊緻曲面的非唯一性例子，可能依賴較低的正則性或局部修改。這些環面並不是一個光滑物件，再在某小塊區域替換掉一個凸起。論文強調，彼此對應的鄰域在任何地方都不局部同餘：差異分布在整個構造裡，而不是藏在某個補丁接縫。

為什麼重要

這是純數學，但背後的直覺很廣。某個形狀可以在一種意義下看似「資料過多」，卻在另一種意義下仍然沒有被唯一辨認。關鍵不在於資料有多少，而在於資料是否包含真正需要的那一類資訊。

「度量加平均曲率」之所以讓人覺得很強，是因為它結合了內在距離與外在彎曲量。緊緻 Bonnet 對指出了缺口：平均彎曲不等於完整彎曲。局部一致並不總能推出整體唯一。解析正則性也不是保證唯一性的魔法。

這個教訓也適用於定理之外。幾何學的反問題經常在問：一組量測值是否足以決定產生它們的物件？這篇論文對一個古典曲面問題給出了非常鮮明的新答案：不一定，即使那個物件是緊緻、光滑而且解析的。

重點摘要

Bobenko、Hoffmann 與 Sageman-Furnas 構造出第一批緊緻 Bonnet 對： $\mathbb{R}^3$ 中兩個彼此不同餘的光滑環面，兩者等距，而且在對應點具有相同的平均曲率。他們的例子是實解析的，而且一般而言無法透過任何環境空間的等距變換彼此對應，因此依照論文的表述，同時解決了 Global Bonnet Problem 與 Cohn-Vossen-Berger 的解析唯一性問題。這項結果沒有推翻古典曲面理論；它證明的只是，度量加平均曲率這組簡化資料，並不總足以唯一辨認一個緊緻曲面。

務實檢視

論文證明了什麼：緊緻、光滑的 Bonnet 對確實存在。更具體地說，作者明確構造出 $\mathbb{R}^3$ 中的環面，它們在對應點具有相同的度量與平均曲率函數，卻彼此不同餘。

合理但不是重點的推論：計算實驗與離散幾何探索，可以為困難的光滑幾何構造提供方向。論文表示這條路徑確實很重要，但結果成立靠的是證明，不是數值圖像。

論文沒有證明什麼：它沒有說所有或大多數曲面都有這種模糊性。一般情況下的唯一性仍然是背景的一部分。這些是例外，但它們是足以推翻「永遠唯一」敘述的決定性反例。

一般讀者最需要注意的限制：證明非常技術性，屬於微分幾何核心內容：等溫曲面、Bonnet 對的分類、週期條件與解析構造。讀者可以理解定理在說什麼，而不必跟完整套技術機制。

一般讀者應該有多大信心？對定理本身可以有高度信心：這是一項經同儕審查的數學結果。真正需要小心的是詮釋，不是證據：應讀成「這組簡化幾何資料並不總能決定形狀」，而不是「幾何學無法辨認形狀」。

來源

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, Publications mathématiques de l'IHES (2025), DOI 10.1007/s10240-025-00159-z

<https://doi.org/10.1007/s10240-025-00159-z>

Bobenko, Hoffmann and Sageman-Furnas, arXiv:2110.06335

<https://arxiv.org/abs/2110.06335>